

中山大学本科生期末考试

考试科目：《线性代数》(A卷答案)

学年学期：2017学年第1学期 姓名：_____学 号：_____

学院/系：数学学院 学 院：_____年级专业：_____

考试方式：闭卷 任课教师：_____

考试时长：120分钟 成绩评定：_____阅卷教师：_____

警示 《中山大学授予学士学位工作细则》第八条：“考试作弊者，不授予学士学位。”

-----以下为试题区域，共2道大题，总分100分，考生请在试卷上作答-----

一、填空题(共5小题，每小题3分，共15分)

1. 设 $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 5 & 3 \end{pmatrix}$ ，则 A 的逆矩阵 $A^{-1} = \underline{\begin{pmatrix} 3 & -1 \\ -5 & 2 \end{pmatrix}}$.
2. 设 A 为3阶矩阵， A^* 为 A 的伴随矩阵，且 $|A| = 3$ ，则 $|2A^*| = \underline{72}$.
3. 设 $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 1 & 8 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 4 \end{pmatrix}$ ，则齐次线性方程组 $Ax = 0$ 解空间的空间维数为 2 .
4. 设3阶矩阵 A 与 B 相似，且 A 的特征值为 $-1, 1, 2$ ；则行列式 $|B^2 + B - E| = \underline{-5}$.
5. 设对称矩阵 $A = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & -4 & k \\ 0 & k & -9 \end{pmatrix}$ 为负定矩阵，则 k 的取值范围是 $(-6, 6)$.

二、计算题(共8小题，第1-3小题各8分，第4-6小题各10分，第7小题13分，第8小题18分，共85分)注：要写出必要的计算和推理过程

1. (8分) 计算行列式 $D = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 4 & 6 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 2 & 4 & 3 & 5 \\ 5 & 3 & 1 & 2 \end{vmatrix}$ 的值。

解：

$$D = - \begin{vmatrix} 1 & 2 & 6 \\ 2 & 4 & 5 \\ 5 & 3 & 2 \end{vmatrix} = - \begin{vmatrix} 1 & 2 & 6 \\ 0 & 0 & -7 \\ 5 & 3 & 2 \end{vmatrix} = -7 \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 5 & 3 \end{vmatrix} = 49$$

中间值 4分

方法正确 2分

结果正确 至少扣 2分 (少)

(1/4分) 半)

$$\frac{A^*}{|A|} \quad (24) \quad (-[44]) < \begin{matrix} \text{行3列} \\ \text{行4列} \end{matrix}$$

行里偏
扣2分是

2. (8分) 求矩阵 $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 & 1 \\ 2 & -2 & 0 & -1 \\ 1 & 2 & 2 & 1 \\ 1 & 2 & 3 & 2 \end{pmatrix}$ 的逆矩阵。

解:

$$\begin{aligned} (A, E) &= \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 2 & -2 & 0 & -1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 2 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 3 & 2 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -4 & -4 & -3 & -2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & -1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & -1 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \\ &\sim \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & -1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & -1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & -4 & -4 & -3 & -2 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & -1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & -4 & -3 & -6 & 1 & 4 & 0 \end{pmatrix} \\ &\sim \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & -1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & -6 & 1 & 0 & 4 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 & 0 & 7 & -1 & 0 & -4 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & -1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 6 & -1 & -1 & -3 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & -6 & 1 & 0 & 4 \end{pmatrix} \\ &\sim \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 & -5 & 1 & 2 & 2 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & -1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 6 & -1 & -1 & -3 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & -6 & 1 & 0 & 4 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & -4 & 1 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & -1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 6 & -1 & -1 & -3 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & -6 & 1 & 0 & 4 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

$$\text{则 } A^{-1} = \begin{pmatrix} -4 & 1 & 1 & 2 \\ -1 & 0 & 1 & 0 \\ 6 & -1 & -1 & -3 \\ -6 & 1 & 0 & 4 \end{pmatrix}.$$

天列题 [位置]

有题与法 (后不考)

行3列
行4列

3. (8分) 判断矩阵 $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ -1 & 3 & 0 \\ 1 & 0 & 4 \end{pmatrix}$ 能否相似对角阵, 并说明原因。

A 不能相似对角化。

由特征方程

$$|A - \lambda| = \begin{vmatrix} 1-\lambda & 1 & 0 \\ -1 & 3-\lambda & 0 \\ 1 & 0 & 4-\lambda \end{vmatrix} = (4-\lambda)(\lambda-2)^2 = 0$$

解得特征值 $\lambda_1 = 2$ (2重根), $\lambda_2 = 4$ 。

对应于 $\lambda_1 = 2$, 求解 $(A - 2E)x = 0$, 由于

$$A - 2E = \begin{pmatrix} -1 & 1 & 0 \\ -1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 2 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

知 $R(A - 2E) = 2 < 3$. 从而只能解得1个线性无关特征向量

$$p_1 = \begin{pmatrix} -2 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix}. \quad (7分)$$

(5分)
(值各1分)

4分
(个2分)
分

(文字解1分)

即2重特征值 $\lambda_1 = 2$ 只对应1个线性无关特征向量, 故A没有3个线性无关特征向量, 因此A不能相似对角化. (8分)

4. (10分)已知向量组 $a_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \\ 5 \end{pmatrix}$, $a_2 = \begin{pmatrix} 2 \\ 4 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix}$, $a_3 = \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ 1 \\ 4 \end{pmatrix}$, $a_4 = \begin{pmatrix} 2 \\ 9 \\ 2 \\ 7 \end{pmatrix}$, 求该向量组的秩和一

个最大无关组,并把其余向量用此最大无关组线性表示.

解: 由于

$$A = (a_1, a_2, a_3, a_4) = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 2 \\ 2 & 4 & 1 & 9 \\ 1 & 1 & 1 & 2 \\ 5 & 3 & 4 & 7 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

(5分)

秩为3分

最大无关组5分

秩: 4分

则 $R(A) = R(a_1, a_2, a_3) = 3$. 故向量组的秩为3; a_1, a_2, a_3 是一个最大无关组, 且

$$a_4 = a_1 + 2a_2 - a_3. \quad (10分)$$

秩: 2分

(8分)
组: 4分

5. (10分)设线性方程组 $\begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 4 & 5 & 10 \\ 2 & 3 & 6 \\ 1 & 2 & s \end{pmatrix} x = \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ t \\ 0 \end{pmatrix}$, 问 s, t 为何值时:

(过程) 2分

(1) 方程组无解; (2) 方程组有唯一解; (3) 方程组有无穷多解.

解: 记方程组为 $Ax = b$. 由于

$$(A, b) = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 & 1 \\ 4 & 5 & 10 & 3 \\ 2 & 3 & 6 & t \\ 1 & 2 & s & 0 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 2 & -1 \\ 0 & 1 & 2 & t-2 \\ 0 & 1 & s-2 & -1 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 2 & -1 \\ 0 & 0 & s-4 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & t-1 \end{pmatrix} \quad (4分)$$

则 $2 \leq R(A) \leq R(A, b) \leq 4$.

4

(1) 方程组无解, 则 $R(A) < R(A, b)$, 即 $R(A, b) = R(A) + 1$. 从而有 $\begin{cases} R(A) = 2, \\ R(A, b) = 3 \end{cases}$ 或 $\begin{cases} R(A) = 3, \\ R(A, b) = 4 \end{cases}$

故有

$$\begin{cases} s-4=0 \\ t-1 \neq 0 \end{cases} \quad \text{或} \quad \begin{cases} s-4 \neq 0 \\ t-1 \neq 0 \end{cases}$$

解得 $t \neq 1$.

(6分) 2

(2) 方程组有唯一解, 则 $R(A) = R(A, b) = 3$. 从而

$$\begin{cases} s-4 \neq 0 \\ t-1=0 \end{cases}, \quad \text{解得} \quad \begin{cases} s \neq 4 \\ t=1 \end{cases} \quad (8分)$$

2

(3) 方程组有无穷多解, 则 $R(A) = R(A, b) = 2 < 3$. 从而

$$\begin{cases} s-4=0 \\ t-1=0 \end{cases}, \quad \text{解得} \quad \begin{cases} s=4 \\ t=1 \end{cases} \quad (10分)$$

2

6. (10分)求线性方程组

$$\begin{cases} x_1 - x_2 + 2x_3 - 3x_4 = 3, \\ x_1 - 2x_2 + x_3 - 2x_4 = 4, \\ 2x_1 - x_2 + 5x_3 - 7x_4 = 5 \end{cases}$$

的通解。

解: 由于增广矩阵

$$B = (A, b) = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 & -3 & 3 \\ 1 & -2 & 1 & -2 & 4 \\ 2 & -1 & 5 & -7 & 5 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 0 & 3 & -4 & 2 \\ 0 & 1 & 1 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad (5分)$$

则 $R(A) = 2 < 4$. 故取 x_3, x_4 为自由未知数. 令 $x_3 = k_1, x_4 = k_2$ 解得通解为

$$x = k_1 \begin{pmatrix} -3 \\ -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + k_2 \begin{pmatrix} 4 \\ 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \quad (k_1, k_2 \in \mathbb{R}). \quad (10分)$$

手2
纸4

结构题 3分

7. (13分)设矩阵 $A = \begin{pmatrix} 3 & -4 \\ 1 & -2 \end{pmatrix}$,

(1)求可逆矩阵 P , 使得 $P^{-1}AP$ 为对角阵(8分);

(2) 计算 A^{2018} (5分)。

解: (1) 由特征方程

$$|A - \lambda E| = \begin{vmatrix} 3 - \lambda & -4 \\ 1 & -2 - \lambda \end{vmatrix} = (\lambda - 2)(\lambda + 1) = 0$$

解得特征值 $\lambda_1 = -1, \lambda_2 = 2$.

对应于 $\lambda_1 = -1$, 求解 $(A + E)x = 0$. 由

$$A + E = \begin{pmatrix} 4 & -4 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

解得对应的1个线性无关特征向量

$$p_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}. \quad (4分)$$

对应于 $\lambda_2 = 2$, 求解 $(A - 2E)x = 0$. 由

$$A - 2E = \begin{pmatrix} 1 & -4 \\ 1 & -4 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & -4 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

从而解得对应的1个线性无关特征向量

$$p_2 = \begin{pmatrix} 4 \\ 1 \end{pmatrix}. \quad (6分)$$

取 $P = (p_1, p_2) = \begin{pmatrix} 1 & 4 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$. 则 P 为可逆阵, 且

$$P^{-1}AP = \Lambda = \begin{pmatrix} -1 & \\ & 2 \end{pmatrix}. \quad (8分)$$

向量一个2分
两个3分
全对5分

矩阵题 2分

(每个特征值一个)

特征值 1分

特征向量 1分

(1+1)

(手2, 2分)

(1) 证 2v
证 5)

证 2v
(2v)

(2) 由(1)知, $A = PAP^{-1}$, 且 $P^{-1} = \frac{1}{-3} \begin{pmatrix} 1 & -4 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$ (10分)

从而有

$$A^{2018} = PA^{2018}P^{-1} \quad (11分)$$

$$\begin{aligned} &= -\frac{1}{3} \begin{pmatrix} 1 & 4 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 2^{2018} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & -4 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} \\ &= -\frac{1}{3} \begin{pmatrix} 1-2^{2020} & -4+2^{2020} \\ 1-2^{2018} & -4+2^{2018} \end{pmatrix} \end{aligned} \quad (13分)$$

证 2v

8. (18分) 设 $x = (x_1, x_2, x_3)^T$, 二次型

$$f(x_1, x_2, x_3) = 3x_1^2 + 3x_2^2 + 3x_3^2 - 2x_1x_2 - 2x_1x_3 - 2x_2x_3$$

(1) 求正交阵 P , 使得作正交变换 $x = Py$ 后二次型化为标准形, 并请写出该标准形 (14分);

(2) 判断该二次型的正定性 (2分);

(3) 求当 $\|x\| = 1$ 时, 二次型 f 的最大值 (2分)。

解: (1) 二次型的矩阵为 $A = \begin{pmatrix} 3 & -1 & -1 \\ -1 & 3 & -1 \\ -1 & -1 & 3 \end{pmatrix}$.

证 2v

(2分)

由特征方程

$$|A - \lambda E| = \begin{vmatrix} 3-\lambda & -1 & -1 \\ -1 & 3-\lambda & -1 \\ -1 & -1 & 3-\lambda \end{vmatrix} = (4-\lambda)^2(1-\lambda) = 0$$

解得特征值 $\lambda_1 = 4$ (2重根), $\lambda_2 = 1$.

对应于 $\lambda_1 = 4$, 求解 $(A - 4E)x = 0$. 由

证 2v

(5分)

$$A - 4E = \begin{pmatrix} -1 & -1 & -1 \\ -1 & -1 & -1 \\ -1 & -1 & -1 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

解得 2 个线性无关特征向量

$$\xi_1 = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \xi_2 = \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}. \quad \text{各 1 分}$$

进行施密特正交化过程, 令

$$\eta_1 = \xi_1 = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix};$$

证 2v

$$\eta_2 = \xi_2 - \frac{[\xi_2, \eta_1]}{[\eta_1, \eta_1]} \eta_1 = \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} - \frac{1}{2} \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} -1 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix}; \quad \text{2 分}$$

进行单位化,

$$p_1 = \frac{\eta_1}{\|\eta_1\|} = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad p_2 = \frac{\eta_2}{\|\eta_2\|} = \frac{1}{\sqrt{6}} \begin{pmatrix} -1 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix}.$$

证 2v
各 1 分

(9分)

对应于 $\lambda_2 = 1$, 求解 $(A - E)x = 0$. 由

$$A - E = \begin{pmatrix} 2 & -1 & -1 \\ -1 & 2 & -1 \\ -1 & -1 & 2 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

解得1个线性无关特征向量

$$\xi_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

(14)

进行单位化,

$$p_3 = \frac{\xi_3}{\|\xi_3\|} = \frac{1}{\sqrt{3}} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

(10分)

$$\left[\text{令 } P = (p_1, p_2, p_3) = \begin{pmatrix} -\frac{1}{\sqrt{2}} & -\frac{1}{\sqrt{6}} & \frac{1}{\sqrt{3}} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} & -\frac{1}{\sqrt{6}} & \frac{1}{\sqrt{3}} \\ 0 & \frac{2}{\sqrt{6}} & \frac{1}{\sqrt{3}} \end{pmatrix} \right]$$

$$\begin{cases} x_1 = y_1 \\ x_2 = -y_2 \\ x_3 = -y_3 \end{cases}$$

(13分)

则 P 是正交阵, 且

$$P^{-1}AP = P^TAP = \Lambda = \begin{pmatrix} 4 & & \\ & 4 & \\ & & 1 \end{pmatrix}.$$

(3分)

(11分)

从而作正交变换 $x = Py$, 二次型化为标准形

$$4y_1^2 + 4y_2^2 + y_3^2.$$

(14分)

(2) 由于对称阵 A 的特征值全为正, 则 A 为正定阵,

(不写理由扣1分)

(15分)

从而二次型为正定二次型。

(16分)

(3) 由于正交变换是保长度的, 故问题转化为当 $\|y\| = 1$ 时, 二次型 $f = 4y_1^2 + 4y_2^2 + y_3^2$ 的最大值。又由于

$$f \leq 4(y_1^2 + y_2^2 + y_3^2) = 4\|y\|^2 = 4$$

(17分)

且 $f(1, 0, 0) = 4$,

因此, 二次型的最大值是4。

(不写理由扣1分)

(18分)

$$\begin{aligned} & \vec{x}^T A \vec{x} = \vec{x}^T B^T A B \vec{x} \\ & \vec{y}^T (B^T A B) \vec{y} = \vec{y}^T \Lambda \vec{y} \end{aligned}$$

$$\vec{y}^T (\Lambda) \vec{y} = 4$$

(最大值)

C5 Q30 结论

清。