

珠海校区 2008 学年度第一学期《线性代数》期末考试题

一、填空题 (14 分, 每空 2 分)

1. 若 A 为 3 阶方阵, 且 $|A| = 5$, 则 $|-3A| =$;

2. 设 $a_1 = (1 \ 0 \ 2)^T$, 与 $a_2 = (3 \ 2 \ 0)^T$, $a_3 = (-2 \ -1 \ 1)^T$
 $a_4 = (2 \ 3 \ 5)^T$, 则它们的线性相关性是 ;

3. 设向量 $a = (1 \ 2 \ -1)^T$, 与 $b = (2 \ 3 \ 1)^T$, 则 a, b 的内积为 ;

4. 设 A 为 3 阶矩阵, 且秩 $R(A) = 2$, 矩阵 $B = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 0 \\ -7 & 1 & -5 \end{pmatrix}$, 则 $R(AB) =$;

5. 设 $A = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 2 & 3 & 4 & 5 \\ -2 & 7 & 2 & 3 \\ 5 & 4 & 3 & 7 \end{vmatrix}$, 则 $A_{41} + A_{42} + A_{43} + A_{44} =$;

6. 已知 $A = \begin{pmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 0 & 4 & 3 \\ 0 & 3 & x \end{pmatrix}$ 与 $B = \begin{pmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 0 & y & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ 相似, 则 $x =$, $y =$.

二、计算行列式 (10 分, 每小题 5 分)

(1), $\begin{vmatrix} 1+x_1y_1 & 1+x_1y_2 & 1+x_1y_3 \\ 1+x_2y_1 & 1+x_2y_2 & 1+x_2y_3 \\ 1+x_3y_1 & 1+x_3y_2 & 1+x_3y_3 \end{vmatrix}$

(2) $\begin{vmatrix} 1 & 1 & \dots & 1 \\ 2 & 2^2 & \dots & 2^n \\ 3 & 3^2 & \dots & 3^n \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ n & n^2 & \dots & n^n \end{vmatrix}$

三. 设 $A = \begin{pmatrix} 3 & 2 & 1 \\ 4 & 3 & 2 \\ 5 & 4 & 3 \end{pmatrix}$ $B = \begin{pmatrix} 2 & 2 & 1 \\ 3 & 2 & 2 \\ 4 & 3 & 2 \end{pmatrix}$, 试求矩阵 X , 使得

$AX = BX + A + B$ 成立. (6分)

四. 设 $P = \begin{pmatrix} A & C \\ O & B \end{pmatrix}$, 其中 A 和 B 都是方阵, 证明 P 是可逆的, 并求 P^{-1} (6分)

五. 设列向量组 a_1, a_2, \dots, a_m 线性无关, 讨论列向量组 $b_1 = a_1 + a_2,$

$b_2 = a_2 + a_3, \dots, b_{m-1} = a_{m-1} + a_m, b_m = a_m + a_1$, 的线性相关性. (8分)

六. 求向量组

$$a_1 = (1 \ -1 \ 2 \ 1 \ 0)^T, \quad a_2 = (2 \ -2 \ 4 \ -2 \ 0)^T$$

$$a_3 = (3 \ 0 \ 6 \ -1 \ 1)^T, \quad a_4 = (0 \ 3 \ 0 \ 0 \ 1)^T$$

的秩及一个极大线性无关组, 并把其余的向量用极大线性无关组表示出来. (8分)

七. k 取何值时, 线性方程组 (15分)

$$\begin{cases} x_1 + x_2 - x_3 = 1 \\ 2x_1 + 3x_2 + kx_3 = 3 \\ x_1 + kx_2 + 3x_3 = 2 \end{cases}$$

无解? 有惟一解? 有无穷多解? 当有解时, 求出它的所有解.

八. 已知 A 为 3 阶方阵, 且 A 的特征值为 1, 2, -3.

(1), 求 $|A|$, $|A^{-1}|$

(2), 求 $|A^* + 3A + 2I|$

九. 给定矩阵 $A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ x & 1 & y \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$, (6分)

(1), 求出 A 的特征值

(2). 问若矩阵 A 可对角化, 要求 x, y 满足什么条件.

十. 已知二次型 $f = 2x_1x_2 + 2x_1x_3 - 2x_2x_3$ (15分)

(1) 写出二次型 f 的矩阵

(2) 用正交变换把二次型 f 化为标准形, 并写出相应的正交矩阵

(3) 求 f 的秩, 正惯性指数, 负惯性指数, 和符号差

十一. 已知二次型 $f = x_1^2 + x_2^2 + 4x_3^2 + 2tx_1x_2 - 2x_1x_3 + 4x_2x_3$ 是正定的, 求

t 的取值范围. (6分).