一. 填空

1. 向量空间 $V=\{k(1,0,1,0)^T+t(0,1,1,0)^T \mid k,t\in R\}$ 的空间维数为______

2. 设向量 $\alpha=(1,-2,3)^T$ 与 $\beta=(5,k,1)^T$ 正交，则 $k=$______

3. 设3阶矩阵A的特征值为 $-1,1,2$，则 $|A^2+A+E|=$______

4. 设二次型 $f(x_1,x_2,x_3,x_4)=x_1^2-3x_2^2+3x_3^2+4x_4^2$，则二次型f的正惯性指数为______

5. 设对称矩阵 $A=\begin{pmatrix}5&0&0\\0&2&-4\\0&-4&t\end{pmatrix}$ 为正定矩阵，则t的取值范围是______

二. 计算

1. 求向量组 $\alpha_1=\begin{pmatrix}1\\2\\-3\\5\end{pmatrix}$，$\alpha_2=\begin{pmatrix}3\\1\\-2\\4\end{pmatrix}$，$\alpha_3=\begin{pmatrix}5\\5\\-3\\7\end{pmatrix}$，$\alpha_4=\begin{pmatrix}-1\\8\\-1\\3\end{pmatrix}$ 的秩和最大无关组

并把其余向量用此最大无关组线性表示.

2. 设有向量组K: $\alpha_1=\begin{pmatrix}1\\1\\2\\4\end{pmatrix}$ $\alpha_2=\begin{pmatrix}2\\1\\3\\5\end{pmatrix}$，$\alpha_3=\begin{pmatrix}\alpha\\2\\6\\10\end{pmatrix}$，其向量 $b=\begin{pmatrix}-1\\\beta\\-1\\-1\end{pmatrix}$

问 α,β 为何值时 ① b不能由K线性表示 ② 能且唯一 ③ 能且不唯一

3. 求 $\begin{cases}x_1-3x_2+3x_3+2x_4=0\\x_1-4x_2+3x_3+9x_4=0\\-3x_1+7x_2-9x_3+8x_4=0\end{cases}$ 的一个基础解系.

4. 求 $\begin{cases}x_1-x_2+2x_3-3x_4=3\\x_1-2x_2+4x_3-2x_4=4\\x_1+x_2-2x_3-5x_4=1\end{cases}$ 的通解.

5. 判断 $A=\begin{pmatrix}-1&1&0\\-4&3&0\\2&0&3\end{pmatrix}$ 能否相似对角化.

6. 设 $A=\begin{pmatrix}4&-6\\3&-5\end{pmatrix}$ (1) 求可逆P，使 $P^{-1}AP$ 为对角阵

(2) 计算 A^n.

7. 设二次型 $f(x_1,x_2,x_3)=5x_1^2+5x_2^2+5x_3^2-4x_1x_2-4x_1x_3-4x_2x_3$

(1) 变为标准型，并写出正交矩阵

(2) 判断该二次型正定型

1. 3　　2. 4　　3. 21　　4. 3　　5. $t>8$

1. $R=3$, $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$.　$\alpha_4=\alpha_1-4\alpha_2+2\alpha_3$

2. ① $\beta\neq 0$ 或 $\alpha=4$　② $\beta=0$ 且 $\alpha\neq 4$　③ $\beta=0$ 且 $\alpha=4$

3. $\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} = c_1\begin{pmatrix} -3 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + c_2\begin{pmatrix} 19 \\ 7 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$　$c_1, c_2 \in R$.

4. $\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} = c_1\begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + c_2\begin{pmatrix} 4 \\ 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$　$c_1, c_2 \in R$.

5. $\lambda_1=3$, $\lambda_2=\lambda_3=1$ 不可以.

6. $\lambda_1=-2$, $\lambda_2=1$　$p_1=\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$　$p_2=\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}$　$P\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$

$A^n=\begin{pmatrix} -(-2)^n+2 & 2(-2)^n-2 \\ -(-2)^n+1 & 2(-2)^n-1 \end{pmatrix}$.

7. $\lambda_1=\lambda_2=7$, $\lambda_3=1$　$P=\begin{pmatrix} -\frac{1}{\sqrt{2}} & -\frac{1}{\sqrt{6}} & \frac{1}{\sqrt{3}} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} & -\frac{1}{\sqrt{6}} & \frac{1}{\sqrt{3}} \\ 0 & \frac{2}{\sqrt{6}} & \frac{1}{\sqrt{3}} \end{pmatrix}$　正定.