中山大学本科生模拟期末考试

考试科目：《线性代数》

学年学期：2017 学年第 1 学期　　姓　名：________　学号：________

考试时长：120 分钟　　成绩评定：________　阅卷教师：________

警示 《中山大学授予学士学位工作细则》第八条：“考试作弊者，不授予学士学位。”

----------以下为试题区域，共 10 题，总分 100 分-------------

一、计算行列式$\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 2 & 3 & 4 & 1 \\ 3 & 4 & 1 & 2 \\ 4 & 1 & 2 & 3 \end{vmatrix}$，请写出必要的计算过程。　（10 分）

二、解下列矩阵方程，请写出必要的计算过程。　（10 分）

$$\begin{pmatrix} 2 & 1 & -3 \\ 1 & 2 & -2 \\ -1 & 3 & 2 \end{pmatrix} X = \begin{pmatrix} 0 & 2 \\ 3 & 1 \\ 5 & 1 \end{pmatrix}$$

三、向量组:，$\boldsymbol{a}_1=\begin{bmatrix}1\\2\\2\end{bmatrix},\boldsymbol{a}_2=\begin{bmatrix}1\\1\\2\end{bmatrix},\boldsymbol{a}_3=\begin{bmatrix}2\\1\\1\end{bmatrix},\boldsymbol{a}_4=\begin{bmatrix}-1\\-1\\2\end{bmatrix}$.求向量组的秩及一个极大线性无关组，并用它线性表示其余的向量。（12 分）

四、已知向量组$\boldsymbol{a}_1,\boldsymbol{a}_2,\boldsymbol{a}_3$是齐次线性方程组$A\boldsymbol{x}=\boldsymbol{0}$的基础解系，求证：向量组$2\boldsymbol{a}_1+\boldsymbol{a}_2,\boldsymbol{a}_2+5\boldsymbol{a}_3,3\boldsymbol{a}_1+4\boldsymbol{a}_3$也是$A\boldsymbol{x}=\boldsymbol{0}$的基础解系。（10 分）

五、当λ为何值时，线性方程组$\begin{cases} 2x, +\lambda x_2 - x_3 = 1 \\ \lambda x_1 - x_2 + x_3 = 2 \\ 4x_1 + 5x_2 - 5x_3 = -1 \end{cases}$ 无解、有唯一解或有无穷多解

并在有无穷多解时，求出其通解。 (15 分)

六、已知矩阵$A=\begin{bmatrix}2&2&0\\8&2&a\\0&0&6\end{bmatrix}$相似于对角矩阵$\Lambda$， 求$a$并且求可逆矩阵$P$使$P^{-1}AP=\Lambda$。 （12 分）

七、二次型$f(x_1,x_2,x_3)=ax_1^2+ax_2^2+(a-1)x_3^2+2x_1x_3-2x_2x_3$ （15 分）

若二次型f的规范型为$y_1^2+y_2^2$，求a的值.并求一个正交变换化该二次型为标准形.

八、已知 3 阶矩阵A的伴随矩阵$A^* = \begin{bmatrix} 1 & & \\ & 2 & \\ & & 2 \end{bmatrix}$,求矩阵$A$（6 分）

九、已知矩阵A与B为n阶对称正定矩阵，

求证：（1）$A+B$也是n阶对称正定矩阵；

（2）若 1 不是A的特征值，则A^2-A+E也是对称正定矩阵。（10 分）