中山大学本科生期末考试

考试科目:《数学物理方法》(A 卷)

学年学期: 2018 学年第 1 学期	姓　　名:
学　　院: 物理学院	学　　号:
考试方式: 闭卷	年级专业: 17 级　　物理
考试时长: 120 分钟	班　　别:

警示《中山大学授予学士学位工作细则》第八条:"考试作弊者,不授予学士学位."

————以下为试题区域,共三道大题,总分 100 分,考生请在答题纸上作答————

一、选择题(请将正确答案的序号填写在答题纸上. 共 8 小题,每小题 5 分,共 40 分.)

1. 下列四个二元函数 $u(x,y)=\mathrm{e}^{x}\cos y, \mathrm{e}^{x}\sin y, \mathrm{e}^{-x}\cos y, \mathrm{e}^{-x}\sin y$ 是否可以作为某个解析函数的实部?

(A) 四者均可　　(B) 只有第一和第二可以　　(C) 只有第一和第三可以　　(D) 只有第一可以

2. 已知解析函数 $f(z)$ 在复平面上只有 $z=0$ 一个奇点,则可以肯定

(A) $\int_{|z|=1} f(z)\,dz=0$ (B) $\int_{|z|=1} f(z)\,dz=\int_{|z|=2} f(z)\,dz$ (C) $\int_{|z|=1} f(z)\,dz\neq 0$ (D) $\int_{|z|=1}[f(z)/z]\,dz=2\pi\mathrm{i}f(0)$

R一定为正数！！！！

3. 将函数 $1/\cos(z-1)$ 以 $a=0$ 为中心展开为 Taylor 级数,则该级数的收敛半径 R 为

(A) [illegible]　　(B) $\pi/2+1$　　(C) $\pi/2-1$　　(D) $-\pi/2+1$

4. $z=0$ 是函数 $(\sin z-z)/z^3$ 的什么奇点?

(A) 三阶极点　　(B) 二阶极点　　(C) 一阶极点　　(D) 可去奇点

5. $x=1$ 是 Legendre 方程 $(1-x^2)y''-2xy'+\lambda y=0$ (其中 λ 是常数) 的

(A) 常点　　(B) 正则奇点　　(C) 单极点　　(D) 本性奇点

6. 对于本征值问题 $y''+y'/x+\lambda y=0$ $(0<a<x<b<+\infty)$, $y(a)=y(b)=0$,对应于不同本征值的本征函数有正交关系

(A) $\int_a^b y_m(x)y_n(x)\,\mathrm{d}x=0$　(B) $\int_a^b x^{-1}y_m(x)y_n(x)\,\mathrm{d}x=0$　(C) $\int_a^b xy_m(x)y_n(x)\,\mathrm{d}x=0$　(D) 不一定正交

7. 长为 l 的均匀导热细杆,两端和侧面均绝热,杆上有热源,热传导方程为 $\partial u/\partial t-a^2\partial^2 u/\partial x^2=f_0\sin kx$,其中 f_0 和 k 为常数. 下列哪个条件可以使杆上的温度分布在长时间后达到稳定?

(A) $kl=\pi/2$　　(B) $kl=\pi$　　(C) $kl=3\pi/2$　　(D) $kl=2\pi$

8. 无界弦的自由振动方程 $\partial^2u/\partial t^2-a^2\partial^2u/\partial x^2=0$ 在对 x 作 Fourier 变换 $\mathscr{F}[u(x,t)]=U(k,t)$ 后成为

(A) $\mathrm{d}^2U/\mathrm{d}t^2+k^2a^2U=0$ (B) $\mathrm{d}^2U/\mathrm{d}t^2-k^2a^2U=0$ (C) $\mathrm{d}^2U/\mathrm{d}k^2+k^2a^2U=0$ (D) $\mathrm{d}^2U/\mathrm{d}k^2-k^2a^2U=0$

二、填空题(共 2 小题,各小题分数依次为 10 分、15 分,共 25 分.)

1. 球坐标系中,轴对称边界条件下,Laplace 方程的一般解是 (1) $u(r,\theta)=$ ________. 考虑球内的定解问题,球面上 $u|_{r=a}=u_0(2-3\sin^2\theta/2)$,其中 u_0 为常数,则球内 (2) $u(r,\theta)=$ ________.

2. 考虑 1/4 空间的定解问题 $\nabla^2u=0$ $(-\infty<x<+\infty, y>0, z>0)$, $u|_{y=0}=g(x,z)$, $u|_{z=0}=f(x,y)$. 相应的 Green 函数 $G(\boldsymbol{r},\boldsymbol{r}_0)$ 满足的定解问题是 (1) ________, 该 Green 函数为 (2) ________.

三、计算题(共 2 小题,各小题分数依次为 15 分、20 分,共 35 分.)

1. 计算积分 $I=\displaystyle\int_0^{\infty}\frac{x^{2n-2}}{x^{2n}+a^{2n}}\mathrm{d}x$,其中 $a>0$, n 为正整数.

2. 均匀导热细杆,长为 l,侧面和左端绝热,右端有恒定热流流入,边界条件为 $\partial u/\partial x|_{x=l}=q$,其中 q 为常数,初始时杆上温度分布为 $\varphi(x)=qx^2/2l+2u_0\cos^2(\pi x/l)$,其中 u_0 为常数,求以后的温度分布 $u(x,t)$. 讨论 $t\to\infty$ 时 $u(x,t)$ 的行为并给出物理解释. (彩蛋: 物理解释附加 2 分,可计入成绩,达 100 分为止.)