数学物理方法作业答案

潘逸文*; 余钊焕†
中国广州中山大学物理学院

2020 年 12 月 29 日

简　介

2020 年秋季数学物理方法 (面向 19 级光电信息科学与工程) 作业参考答案。

目　录

*Email address: panyw5@mail.sysu.edu.cn
†Email address: yuzhaoh5@mail.sysu.edu.cn

1 第一周 (9 月 3 日课上交)

1. 用指数表示法表示下面的复数

$$(a)\ \frac{i}{e^2}, \qquad (b)\ 1+e^{\frac{9\pi i}{14}}e^{\frac{-\pi i}{7}}, \qquad (c)\ 1+i \text{ 的所有 7 次方根} \tag{1.1}$$

答 (辐角可任意添加 $2\pi n$ 都对)

$$(a)\ \frac{i}{e^2} = \frac{e^{\pi i/2}}{e^2} = \left(\frac{1}{e^2}\right)e^{\pi i/2} \tag{1.2}$$

$$(b)\ 1+e^{\frac{9\pi i}{14}}e^{\frac{-\pi i}{7}} = 1+e^{\frac{9\pi i}{14}+\frac{-\pi i}{7}} = 1+e^{\frac{\pi i}{2}} = 1+i = \sqrt{2}(\cos(\pi/4)+i\sin(\pi/4)) = \sqrt{2}e^{\pi i/4} \tag{1.3}$$

$$(c) 1+i = \sqrt{2}e^{i\frac{\pi}{4}} \Rightarrow (1+i)^{1/7} = \sqrt{2}^{1/7}e^{i\frac{\pi}{28}}e^{\frac{2\pi k i}{7}}, \qquad k=0,1,2,\ldots 6 \tag{1.4}$$

2. 用代数式 (即 $x+iy$ 的形式) 表达以下复数，其中 $x,y,r\in\mathbb{R}$，i 是虚数单位,

$$(a)\ r^i, \text{其中 } r>0, \qquad (b)\ i^{x+yi}\ . \tag{1.5}$$

答：(有多值现象时可以只写某个单值分支的结果)

$$(a)\ r^i = e^{i\ln r} = \cos(\ln r) + i\sin(\ln r) \tag{1.6}$$

$$(b)\ i^{x+yi} = e^{(\frac{\pi}{2}+2k\pi)i(x+yi)} = e^{(2k\pi+\frac{\pi}{2})ix-(\frac{\pi}{2}+2k\pi)y} \tag{1.7}$$

$$= e^{-(\frac{\pi}{2}+2k\pi)y}\cos(\frac{\pi x}{2}+2k\pi x) + ie^{-(\frac{\pi}{2}+2k\pi)y}\sin(\frac{\pi x}{2}+2k\pi x)\ . \tag{1.8}$$

3. 设点集 $S\equiv\{z\in\mathbb{C}\mid |z|^2\le R^2\}$，其中 $R>0$。求解最大的 $N\in\mathbb{N}$，使得对于任意 S 的内点 z，z^N 都还是内点。写明推理。

答：(意思说对即可，无需严格证明。关键要意识到有两种情况。)

(1) 当 $0<R\le 1$，z 作为任意内点，有 $|z|<R\le 1$。因此对于任何 $N>1$, $|z^N|=|z|^N<|z|$，从而 z^N 也还是内点。因此，$0<R\le 1$ 时 N 可以任意大，没有最大值，或说 $N_{\max}=+\infty$。

(2) 当 $R>1$，则 z 作为任意内点，可能有 $|z|>1$，尤其是极为靠近边界的内点。对于这些点，$|z^2|=|z|^2$ 已经大于 R 了，但是 $z^1=z$ 自然还是内点。因此 $N_{\max}=1$。

4. 考虑点集 $S\equiv\{z\in\mathbb{C}\mid |z-1|+|z+1|<R\}$，其中 $R>0$。S 是否区域？是否单连通？

答：(意思说对即可，无需严格证明。关键要意识到有两种情况。)

当 $R>2$ 时，点集恰为以 ±1 为焦点的椭圆内部，因此是区域，且单连通。

当 $R\le 2$ 时，点集为空集，不是区域，说连不连通都可以。

4. 设 f 为区域 D 内解析函数，同时，其值域是 $\mathbb{R}$ 的子集。求证 f 是常数函数。

答：由于 f 的值域是 $\mathbb{R}$ 的子集，因此 $f = u + iv$ 中 $v = 0$。因此由 CR 条件，

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial u}{\partial y} = 0 \ , \tag{1.9}$$

即 u 与 x, y 都无关，是常数。因此 $f = u =$ 常数。

5. 设解析函数 $f(z)$ 的实部 $u(x,y) = e^x x \cos y - e^x y \sin y$，求其虚部，并把 f 的表达式改写为只含 z 的表达式。

答：设 $v(x,y)$ 存在，则

$$\frac{\partial v}{\partial x} = -\frac{\partial u}{\partial y} = -e^x x \sin y - e^x y \sin y, \qquad \frac{\partial v}{\partial y} = \frac{\partial u}{\partial x} = e^x x \cos y + e^x \cos y - e^x y \sin y \ . \tag{1.10}$$

从而可以计算

$$\begin{aligned}
&\int_{(0,0)}^{(x,y)} -(e^x x \sin y + e^x y \sin y) dx + (e^x x \cos y + e^x \cos y - e^x y \sin y) dy && (1.11)\\
=&\int_{(0,0)}^{(x,0)} -(e^x x \sin y + e^x y \sin y) dx + \int_{(0,x)}^{(x,y)} (e^x x \cos y + e^x \cos y - e^x y \sin y) dy && (1.12)\\
=&\ + e^x x \int_{(x,0)}^{(x,y)} (\cos y) dy + e^x \int_{(x,0)}^{(x,y)} (\cos y) dy - e^x \int_{(x,0)}^{(x,y)} (y \sin y) dy && (1.13)\\
=&\ e^x (y \cos y + x \sin y) && (1.14)
\end{aligned}$$

因此 $v(x,y) = e^x(y \cos y + x \sin y) + C$。于是

$$\begin{aligned}
u + iv &= e^x x \cos y - e^x y \sin y + i e^x (y \cos y + x \sin y) + iC && (1.15)\\
&= e^x (x \cos y - y \sin y + i y \cos y + i x \sin y) + iC && (1.16)\\
&= e^x (x + iy)(\cos y + i \sin y) + iC && (1.17)\\
&= z e^z + iC \ . && (1.18)
\end{aligned}$$

其中 $C \in \mathbb{R}$。

2 第二次作业 (9 月 29 日课上交)

1. 设复变函数 f 在区域 D 内有定义且实部虚部的的一阶偏导数连续，$G \subset D$ 是其子区域并有 $G \cup \partial G \subset D$。证明复变函数的格林公式

$$\int_{\partial G} f(z, \bar{z}) dz = \int_G \partial_{\bar{z}} f(z, \bar{z}) d\bar{z} dz \ , \tag{2.1}$$

其中面积元 $d\bar{z}dz = 2idxdy$。

答：对于题目所述的复变函数，我们可以先对 f 复积分作实部虚部分解（如果直接对 f 用格林公式，没有实虚分解，也算对），并分别利用格林公式，

$$\int_{\partial G} f(z,\bar{z})dz = \int_{\partial G}(udx - vdy) + i\int_{\partial G}(vdx + udy) \tag{2.2}$$

$$= -\int_G \Big(\frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x}\Big)dxdy + i\int_G \Big(\frac{\partial u}{\partial x} - \frac{\partial v}{\partial y}\Big)dxdy\ . \tag{2.3}$$

又注意到

$$\partial_{\bar{z}} f = \frac{1}{2}\big(\frac{\partial(u+iv)}{\partial x} + i\frac{\partial(u+iv)}{\partial y}\big) = \frac{1}{2}\Big(\frac{\partial u}{\partial x} - \frac{\partial v}{\partial y}\Big) + \frac{i}{2}\Big(\frac{\partial v}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial y}\Big)\ , \tag{2.4}$$

因此代入 $d\bar{z}dz = 2idxdy$，有

$$\partial_{\bar{z}} f d\bar{z}dz = \frac{1}{2}\Big(\frac{\partial u}{\partial x} - \frac{\partial v}{\partial y}\Big)2idxdy + \frac{i}{2}\Big(\frac{\partial v}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial y}\Big)2idxdy \tag{2.5}$$

$$= i\Big(\frac{\partial u}{\partial x} - \frac{\partial v}{\partial y}\Big)dxdy - \Big(\frac{\partial v}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial y}\Big)dxdy\ . \tag{2.6}$$

比较 $\int_G \partial_{\bar{z}} f d\bar{z}dz$ 与上面结果可得目标结果。

2. 计算 $I(C_1) = \int_{C_1} \bar{z}dz$ 和 $I(C_2) = \int_{C_2} \bar{z}dz$，其中 C_1 和 C_2 分别是上半圆周 (半径 $R > 0$，逆时针方向) 和下半圆周 (半径 $R > 0$，逆时针方向)。

答：利用参数积分计算积分。令 $z = re^{i\theta}$, 于是沿着积分曲线有 $dz = rie^{i\theta}d\theta$,

$$I(C) = \int_C \bar{z}dz = \int_C re^{-i\theta}rie^{i\theta}d\theta = (r^2)\big|_{r=R}i\int d\theta\ . \tag{2.7}$$

于是有

$$I(C_1) = i\int_0^{\pi} d\theta = \pi i R^2, \qquad I(C_2) = i\int_{-\pi}^{0} d\theta = i\pi R^2\ . \tag{2.8}$$

3. 计算围道积分 $(n \in \mathbb{N})$

$$\oint_C \Big(z + \frac{1}{z}\Big)^n \frac{dz}{z}, \qquad C = \{z \in \mathbb{C}|\ |z| = 1\ \}. \tag{2.9}$$

答:

$$\Big(z + \frac{1}{z}\Big)^n = \sum_{k=0}^{n} C_n^k z^k \frac{1}{z^{n-k}} = \sum_{k=0}^{n} C_n^k \frac{1}{z^{n-2k}}\ . \tag{2.10}$$

因此

$$\oint_C \left(z+\frac{1}{z}\right)^n \frac{dz}{z} = \sum_{k=0}^{n} \oint_C C_n^k \frac{1}{z^{n-2k+1}} dz \ . \tag{2.11}$$

只有当 $n-2k+1=1$ 才有非零积分值，即此时 $n=2k$，即 n 是偶数。积分值为

$$2\pi i C_n^k = 2\pi i C_{2k}^k \ . \tag{2.12}$$

也可以用高阶导数公式来做。

$$\oint \left(z+\frac{1}{z}\right)^n \frac{dz}{z} = \int (z^2+1)^n \frac{1}{z^{n+1}} dz = \frac{2\pi i}{n!} \frac{d^n}{dz^n}\bigg|_{z=0} (z^2+1)^n \tag{2.13}$$

$$= \frac{2\pi i}{n!} \frac{d^n}{dz^n}\bigg|_{z=0} \sum_{m=0}^{n} C_n^m z^{2m} \ . \tag{2.14}$$

注意到

$$\frac{d^k}{dz^k}\bigg|_{z=0} z^\ell = k!\delta_{k\ell} = \begin{cases} 0, & k \neq \ell \\ k!, & k = \ell \end{cases} , \tag{2.15}$$

因此

$$\frac{2\pi i}{n!} \frac{d^n}{dz^n}\bigg|_{z=0} \sum_{m=0}^{n} C_n^m z^{2m} = \frac{2\pi i}{n!} \sum_{m=0}^{n} C_n^m n! \delta_{n,2m} = 2\pi i C_n^{n/2} \quad \text{if } n \in \mathbb{Z}_{\text{even}}, \quad \text{and } 0 \text{ if } n \in \mathbb{Z}_{\text{odd}} \ . \tag{2.16}$$

4. 计算

$$\oint_{|z|=1} \frac{\sin(\cos z)}{z} dz \ . \tag{2.17}$$

答：由于 $\sin(\cos z)$ 在全平面解析，我们可以利用 Cauchy 积分公式

$$\int_{|z|=1} \frac{\sin(\cos z)}{z} dz = 2\pi i \sin(\cos z)|_{z=0} = 2\pi i \sin(1) \ . \tag{2.18}$$

5. 设函数 $f(z)$ 在区域 $N(0,R+1)$ 上解析。计算积分 ($n \in \mathbb{N}$，$R>0$)

$$\oint_C f(z)\bar{z}^{n+1} dz, \qquad C = \partial N(0,R) \ . \tag{2.19}$$

答：在积分路径上 $z\bar{z}=R^2 \Rightarrow \bar{z}=R^2/z$，得到

$$\int_C f(z)\bar{z}^{n+1} dz = R^{2(n+1)} \int_C f(z) \frac{1}{z^{n+1}} dz = R^{2(n+1)} \frac{2\pi i}{n!} f^{(n)}(0) \ . \tag{2.20}$$

6. 考虑函数 $f(z) = z^{-1/2}$，并选取主值分支使得 $f(1) = 1$。计算

$$\int_{+1}^{-1} f(z)dz \ , \tag{2.21}$$

其中路径选为上半圆周。

答：选择 $f(z)$ 的主值分支使得 $f(1) = 1$ 说明可以

$$f(re^{i\theta}) = r^{-1/2}e^{-i\theta/2} \ , \qquad \theta \in (-\pi, \pi) \ . \tag{2.22}$$

于是该积分可以写成 (其中 $r = 1$)

$$\int_0^\pi r^{-1/2}e^{-i\theta/2} rie^{i\theta} d\theta = i\int_0^\pi e^{\frac{i\theta}{2}} d\theta = -2 + 2i \ . \tag{2.23}$$

3　第三次作业 (10 月 13 日课上交)

1. 计算下面幂级数的收敛半径

$$(1) \ \sum_{n=1}^\infty \frac{1}{n^n} z^n \ , \qquad (2) \ \sum_{n=1}^\infty \left(1 - \frac{1}{n}\right)^n z^n \ . \tag{3.1}$$

答：

$$\ell \equiv \lim_{n\to\infty} (\frac{1}{n^n})^{1/n} = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} = 0 \Rightarrow R = \frac{1}{\ell} = \infty \ . \tag{3.2}$$

因此第一个级数收敛，收敛半径是无穷大。

$$\ell \equiv \lim_{n\to\infty} \left[(1 - \frac{1}{n})^n\right]^{1/n} = \lim_{n\to+\infty} (1 - \frac{1}{n}) = 1 \Rightarrow R = \frac{1}{\ell} = 1 \ . \tag{3.3}$$

第二个级数收敛，收敛半径是 1.

2. 设 $f(z)$ 是 $N(0, 1)$ 内的解析函数。计算 $(1 - z)^{-1}f(z)$ 以原点 $a = 0$ 为中心的泰勒展开（给出泰勒级数通项，用 f 的各阶导数表达）。

答：可分别对 $1/(1 - z)$ 与 $f(z)$ 作泰勒展开，

$$\left(\sum_{n=0}^{+\infty} z^n\right)\left(\sum_{m=0}^{+\infty} \frac{1}{m!} f^{(m)}(0) z^m\right) = \sum_{m,n=0}^{+\infty} z^{m+n} 1^n \frac{1}{m!} f^{(m)}(0) = \sum_{N=0}^{+\infty} \left[\sum_{m=0}^{N} 1^{N-m} \frac{1}{m!} f^{(m)}(0)\right] z^N \tag{3.4}$$

$$= \sum_{N=0}^{+\infty} c_N z^N \ , \tag{3.5}$$

其中

$$c_N \equiv \sum_{m=0}^{N} \frac{1}{m!} f^{(m)}(0) \tag{3.6}$$

3. 考虑复变函数

$$f(z) \equiv \frac{z^n}{z-1} \ , \qquad n \in \mathbb{N} \ . \tag{3.7}$$

(1) 列举 $f(z)$ 以原点为中心的环状/开圆盘状解析区域;

(2) 以原点为展开中心，在上述每一个解析区域内写出 $f(z)$ 的 Laurent 或 Taylor 展开 $f(z) = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} \lambda_k z^k$，并比较展开系数 $\lambda_{k\geq 0}$ 与 $f^{(k)}(0)/k!$ 是否相等 (可为一般 n 和 k 计算通项然后比较，也可取 $n=2$，$k=1,2,3$ 然后比较)。

答:

(1) 有圆盘状解析区域 $|z|<1$ 和环状解析区域 $1<|z|<\infty$。

(2) 在 $|z|<1$ 区域内可以作 Taylor 展开,

$$-\frac{z^n}{1-z} = -z^n \sum_{k=0}^{\infty} z^k = -\sum_{k=0}^{\infty} z^{n+k} = -z^n - z^{n+1} - z^{n+2} - \ldots \ . \tag{3.8}$$

的确每个系数都与 $f^{(n)}(0)/n!$ 相等,

$$\frac{1}{k!}\frac{d^k}{dz^k} f(z)_{n=2} = 0, 1, 1, \qquad \text{当 } k = 1, 2, 3 \ . \tag{3.9}$$

在环状区域 $0<|z|<\infty$ 可以作 Laurent 展开,

$$-\frac{z^n}{1-z} = +\frac{1}{z}\frac{z^n}{1-z^{-1}} = +\frac{1}{z} z^n \sum_{k=0}^{\infty} z^{-k} = +\sum_{k=0}^{\infty} z^{n-k-1} = +z^{n-1} + z^{n-2} + z^{n-3} + \ldots \ . \tag{3.10}$$

当 $n=2$,

$$-\frac{z^2}{1-z} = +z + 1 + z^{-1} + \ldots \ , \tag{3.11}$$

与 $f^{(k)}(0)/k!$ 不相等。

4. 考虑以 $a \in \mathbb{R}$ 为参数的复变函数 $\psi_a(z) \equiv e^{2az-z^2}$.

(1) 用围道积分表达导数 $\psi_a^{(n)}(0)$, $n \in \mathbb{N}$.

(2) 利用上述围道积分表达式，证明

$$\psi_a^{(n)}(0) = (-1)^n e^{a^2} \frac{d^n}{da^n} e^{-a^2} \ . \tag{3.12}$$

其中，$H_n(a) \equiv (-1)^n e^{a^2} \frac{d^n}{da^n} e^{-a^2}$ 是著名的 Hermite 多项式。提示：可以利用如下积分变量替换

$$\int_{|z|=\rho} f(z)dz = -\oint_{|x-\zeta|=\rho} f(x-\zeta)d\zeta \ . \tag{3.13}$$

答：

(1) 利用高阶导数公式，有

$$\psi^{(n)}(0) = \frac{n!}{2\pi i} \oint_{|z|=1} \frac{e^{2az-z^2}}{z^{n+1}} dz \ . \tag{3.14}$$

(2) 先考虑

$$e^{2az-z^2} = e^{-(z-a)^2+a^2} = e^{a^2} e^{-(z-a)^2} \ . \tag{3.15}$$

于是有

$$\psi^{(n)}(0) = e^{a^2} \frac{n!}{2\pi i} \oint_{|z|=1} \frac{e^{-(z-a)^2}}{z^{n+1}} dz \ . \tag{3.16}$$

令

$$\zeta = a - z \qquad \Rightarrow \qquad d\zeta = -dz, \qquad z = a - \zeta \tag{3.17}$$

于是

$$\psi^{(n)}(0) = \ -e^{a^2} \frac{n!}{2\pi i} \oint_{|\zeta-a|=1} \frac{e^{-\zeta^2}}{(a-\zeta)^{n+1}} d\zeta \tag{3.18}$$

$$= (-1)^n e^{a^2} \frac{n!}{2\pi i} \oint_{|\zeta-a|=1} \frac{e^{-\zeta^2}}{(\zeta-a)^{n+1}} d\zeta = (-1)^n e^{a^2} \frac{d^n}{d\zeta^n}\bigg|_{\zeta=a} e^{-\zeta^2} \tag{3.19}$$

$$= (-1)^n e^{a^2} \frac{d^n}{da^2} e^{-a^2} \ . \tag{3.20}$$

5. 计算下面函数在 $z=0$ 的留数

$$(a)\ \frac{\cos z}{z^3} \ , \qquad (b)\ \frac{e^z}{z^3} \ . \tag{3.21}$$

答：(a) 中 0 为 3-阶极点，可以用公式

$$\mathrm{Res}_{z\to 0} \frac{\cos z}{z^3} = \frac{1}{(3-1)!} \frac{d^2}{dz^2}\bigg|_{z=0} \left[(z)^3 \frac{\cos z}{z^3} \right] = -\frac{1}{2} \ . \tag{3.22}$$

(b) 中 0 为 3-阶极点，可以用公式

$$\mathrm{Res}_{z\to 0} \frac{e^z}{z^3} = \frac{1}{(3-1)!} \frac{d^2}{dz^2}\bigg|_{z=0} \left[(z)^3 \frac{e^z}{z^3} \right] = +\frac{1}{2} \ . \tag{3.23}$$

6. 利用留数定理计算积分

$$(a)\ \oint_{|z|=\rho>1} \frac{5z-2}{z(z-1)}dz\ , \qquad (b)\oint_{|z|=1}\frac{\cos z}{z^{2n}}dz\ , n=1,2,\dots\ . \tag{3.24}$$

答：(a) 由于围道的半径大于一，所以包含在围道内部的奇点有 $z=0$ 和 $z=1$。积分等于 $2\pi i$ 乘以留数之和，而两个奇点分别为单极点，因此可以简单计算留数

$$\mathrm{Res}_{z=0} = \frac{-2}{-1} = 2\ , \qquad \mathrm{Res}_{z=1} = \frac{3}{1} = 3\ . \tag{3.25}$$

因此积分为 $2\pi i(2+3) = 10\pi i$。

(b) 由于围道包围 $(2n)$-阶极点 $z=0$，因此只需要收集该处留数。又由于 $\cos z$ 在 z 处的泰勒展开只有偶数次幂项，因此分式的 Laurent 展开只有偶数次幂项。因此 z^{-1} 次幂项为零，留数为零。因此积分为零。

4 第四次作业 (10 月 27 日课上交)

1. 列出以下函数的 (除无穷远点外) 的所有孤立奇点及其类型。

$$(a)\ \frac{z}{(\sin z)^3}, \qquad (b)\ \frac{1}{z^2+a^2},\ a\in\mathbb{R}, \qquad (c)\ \cosh\frac{1}{z}\ . \tag{4.1}$$

答

(a) $z=n\pi$ 当 $n\neq 0$ 是三阶极点，$z=0$ 是二阶极点。

(b) 当 $a\neq 0$，$z=\pm a$ 是两个单极点；当 $a=0$，$z=0$ 是个二阶极点。

(c) $z=0$ 是个本性奇点。

2. 考虑双边幂级数

$$\Theta(\zeta;q) \equiv \sum_{n=-\infty}^{+\infty} q^{\frac{n^2}{2}}\zeta^n\ , \qquad |q|<1. \tag{4.2}$$

(a) 求该 ζ-双边级数的收敛环。

(b) 求积分

$$\frac{1}{2\pi i}\oint_{|\zeta|=1}\frac{\Theta(\zeta;q)}{\zeta^n}d\zeta\ , \qquad n\in\mathbb{Z}\ . \tag{4.3}$$

(c) 定义 $\vartheta(z|\tau)\equiv\Theta(e^{2\pi i z};e^{2\pi i\tau})$, $\mathrm{Im}\,\tau>0$。证明 $\vartheta(x|it)$ 是某热扩散方程

$$\left(\frac{\partial}{\partial t} - a^2\frac{\partial^2}{\partial x^2}\right)u = 0 \tag{4.4}$$

的一个解，并确定参数 a^2 的值。

答:

(a) 由于 $\lim_{n\to+\infty}\frac{q^{\frac{(n+1)^2}{2}}}{q^{\frac{n^2}{2}}}=0$，因此收敛环是 $0<|z|<+\infty$。

(b) 显然原题级数即为 Θ 的 Laurent 级数，因此

$$q^{\frac{n^2}{2}}=\frac{1}{2\pi i}\oint\frac{\Theta(z;q)}{z^{n+1}}dz\Rightarrow q^{\frac{(n-1)^2}{2}}=\frac{1}{2\pi i}\oint\frac{\Theta(z;q)}{z^{n}}dz\ , \tag{4.5}$$

因此

$$\frac{1}{2\pi i}\oint\frac{\Theta(z;q)}{z^{n}}dz=q^{\frac{(n-1)^2}{2}}\ . \tag{4.6}$$

(c) 直接代入，

$$\frac{\partial}{\partial t}\vartheta(x|it)=\frac{\partial}{\partial t}\sum_n e^{2\pi iit\frac{n^2}{2}}e^{2\pi ix}=-2\pi\sum_n\frac{n^2}{2}e^{2\pi iit\frac{n^2}{2}}e^{2\pi inx} \tag{4.7}$$

$$=\ -\pi\sum_n n^2e^{2\pi iit\frac{n^2}{2}}e^{2\pi inx} \tag{4.8}$$

$$=\ -\pi\sum_n\frac{-1}{4\pi^2}\frac{\partial^2}{\partial x^2}e^{2\pi iit\frac{n^2}{2}}e^{2\pi inx}\ , \tag{4.9}$$

hence we have

$$\left(\frac{\partial}{\partial t}-\frac{1}{4\pi}\frac{\partial^2}{\partial x^2}\right)\vartheta(x|it)=0,\qquad\Rightarrow\qquad a^2=\frac{1}{4\pi}\ . \tag{4.10}$$

3. 利用留数定理计算积分

$$(a)\ \int_0^{+\infty}\frac{x\sin x}{x^2+a^2}dx,\ a>0\ ,\qquad (b)\ \int_0^{+\infty}\frac{\sin mx}{x(x^2+a^2)}dx\ ,\quad m\in\mathbb{Z}_+,a>0\ . \tag{4.11}$$

(a) 见林老师讲义中第 7 小节例 1 $m=1$ 的计算

(b) 首先积分函数是个偶函数，因此可以先扩充积分区域

$$I(m)=\frac{1}{2}\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{\sin mx}{x(x^2+a^2)}=\frac{1}{i}\frac{1}{2}\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{i\sin mx}{x(x^2+a^2)}=\frac{1}{2i}\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{\cos mx+i\sin mx}{x(x^2+a^2)} \tag{4.12}$$

$$=\frac{1}{2i}\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{e^{imx}}{x(x+ia)(x-ia)}\ . \tag{4.13}$$

函数 $\frac{1}{x(x+ia)(x-ia)}$ 在上半平面和实轴上有单极点 0 和 ia。因此可以用公式

$$I(m)=\frac{1}{2i}2\pi i\Big(\frac{1}{2}\mathrm{Res}_{z\to0}\frac{1}{z(z-ia)(z+ia)}e^{imz}+\mathrm{Res}_{z\to ia}\frac{1}{z(z-ia)(z+ia)}e^{imz}\Big) \tag{4.14}$$

$$=\frac{1}{2i}2\pi i\left(\frac{1}{2}\frac{1}{-ia(ia)}+\frac{1}{ia}\frac{1}{2ia}e^{imia}\right) \tag{4.15}$$

$$=\frac{\pi}{2a^2}\left(1-e^{-ma}\right)\ . \tag{4.16}$$

4. 考虑 3 个互异复数 $a_i, i = 1, 2, 3$。计算积分

$$\oint_C \frac{1}{(z-a_1)(z-a_2)(z-a_3)} dz, \tag{4.17}$$

其中 $C = \{z \in \mathbb{C} \mid |z| = 1 + |a_1| + |a_2| + |a_3|\}$。化简最后结果。

答：首先，积分曲线是个大圆，把三个奇点 $a_1, a2, a3$ 包含在内。可以用复连通区域 Cauchy 积分定理，得到

$$\oint_C = \sum_i \oint_{\partial N(a_i,\epsilon)} \ . \tag{4.18}$$

接着使用 Cauchy 积分公式，得到

$$= -\frac{2\pi i}{(a_1-a_2)(a_2-a_3)} - \frac{2\pi i}{(a_1-a_3)(a_3-a_2)} + \frac{2\pi i}{(a_1-a_2)(a_1-a_3)} = 0 \ . \tag{4.19}$$

也可以使用留数定理。

5. 弹性均匀细杆，$x = 0$ 端固定，$x = l$ 端被拉长至 $x = l + d$ 并保持静止（d 不超过弹性限度），$t = 0$ 时突然放开 $x = l$ 端，写出杆作纵振动的定解问题。

答：(a) 拉伸静止后相对形变为 $(d + \ell - \ell)/\ell = d/\ell$，由弹性胡克定理知道，$T = Yd/\ell$.

(b) 由于细杆是均匀的，拉长之后杆上各点位移 u 正比于平衡时的坐标 x，比例系数为 d/l，故初始时刻 x 点处的位移为 $u|_{t=0} = \dfrac{d}{l}x$。杆在放开前保持静止，因而初始时刻杆上各点均没有速度，有 $\left.\dfrac{\partial u}{\partial t}\right|_{t=0} = 0$。$x = 0$ 端固定，满足齐次的第一类边界条件 $u|_{x=0} = 0$；$x = l$ 端自由，满足齐次的第二类边界条件 $\left.\dfrac{\partial u}{\partial x}\right|_{x=l} = 0$。综合起来，定解问题为

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} - a^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = 0, \tag{4.20}$$

$$u|_{t=0} = \frac{d}{l}x, \quad \left.\frac{\partial u}{\partial t}\right|_{t=0} = 0, \tag{4.21}$$

$$u|_{x=0} = 0, \quad \left.\frac{\partial u}{\partial x}\right|_{x=l} = 0. \tag{4.22}$$

5 第五次作业 (11 月 10 日课上交；期中考察)

(1a) 考虑函数 $f(z) = (z-a)^m \varphi(z)$，其中 $m \in \mathbb{N}$，$\varphi(z)$ 是 $\mathbb{C}$ 上解析函数，且 $\varphi(a) \neq 0$. 求积分

$$\frac{1}{2\pi i} \oint_{|z-a|=R>0} \left[\frac{1}{f(z)} \frac{d}{dz} f(z)\right] dz \ . \tag{5.1}$$

(1b) 考虑函数 $\mathbb{C}$ 上解析函数 $f(z)$。设 $f(z)$ 在单位圆内有 n 个零点 a_i，$i=1,\ldots,n$，阶数分别为 $m_i \geq 0$，且 $f(z)$ 在圆上没有零点。求围道积分

$$\frac{1}{2\pi i}\oint_{|z|=1}\left[\frac{1}{f(z)}\frac{d}{dz}f(z)\right]dz\ . \tag{5.2}$$

答：(1a)

$$\frac{1}{2\pi i}\oint_{|z-a|=R}dz\frac{1}{f(z)}\frac{d}{dz}f(z) = \frac{1}{2\pi i}\oint_{|z-a|=R}\frac{1}{(z-a)^m\varphi(z)}(m(z-a)^{m-1}\varphi(z)+(z-a)^m\varphi'(z))dz \tag{5.3}$$

$$= \frac{1}{2\pi i}\oint_{|z-a|=R}m\frac{1}{z-a}dz + \frac{1}{2\pi i}\oint_{|z-a|=R}\frac{\varphi'(z)}{\varphi(z)}dz \tag{5.4}$$

$$= m + \frac{1}{2\pi i}\oint_{|z-a|=R}\frac{\varphi'(z)}{\varphi(z)}dz \tag{5.5}$$

$$= m + \sum_{\{z_i\}}\text{order of zero of }\varphi(z)\text{at zero }z_i \tag{5.6}$$

最后一个等号可以从 (1b) 获得。

(1b) 由于 $f(z)$ 解析，则积分函数的极点都在 $f(z)$ 的零点 z_i 处，利用复通柯西积分公式或者留数定理，原积分可以化成一些单独包围各个 z_i 的小围道积分之和，

$$\frac{1}{2\pi i}\oint_{|z|=1}\left[\frac{1}{f(z)}\frac{d}{dz}f(z)\right]dz = \sum_i\frac{1}{2\pi i}\oint_{|z-z_i|=\epsilon}\left[\frac{1}{f(z)}\frac{d}{dz}f(z)\right]dz\ , \tag{5.7}$$

而在这些零点附近，$f(z)=(z-z_i)^{m_i}\varphi_i(z)$，使得当 ϵ 很小的时候，$\varphi_i(z)$ 在 $|z-z_i|\leq\epsilon$ 都是非零解析的。于是原积分

$$= \frac{1}{2\pi i}\sum_i\oint_{|z-z_i|=\epsilon}\frac{1}{(z-z_i)^{m_i}\varphi_i(z)}(m_i(z-z_i)^{m_i-1}\varphi_i(z)+(z-z_i)^{m_i}\varphi_i'(z)) \tag{5.8}$$

$$= \frac{1}{2\pi i}\sum_i\oint_{|z-z_i|=\epsilon}\frac{m_i}{z-z_i} + \oint_{|z-z_i|=\epsilon}\frac{1}{\varphi_i(z)}\varphi_i'(z) \tag{5.9}$$

$$= \sum_i m_i\ , \tag{5.10}$$

其中最后用了 $\varphi_i'(z)/\varphi_i(z)$ 在小围道内解析的性质，以及柯西积分定理。

2. 深受广大人民群众喜爱的 Γ 函数是自然数的阶乘函数的一种解析延拓。当 $\operatorname{Re}z>0$，定义

$$\Gamma(z)\equiv\int_0^{+\infty}x^{z-1}e^{-x}dx\ . \tag{5.11}$$

(a) 利用分部积分，证明当 $\operatorname{Re}z>0$，有递推性质 $\Gamma(z+1)=z\Gamma(z)$。

(b) 求 $\Gamma(1)$，并结合上述递推性质推出 $\Gamma(n+1)=n!,\ n\in\mathbb{N}$。

(c) 已知 $\Gamma(z)$ 可以解析延拓到几乎整个复平面，即存在 $\mathbb{C}$ 上亚纯函数 $\widehat{\Gamma}(z)$ 使得只要 $\mathrm{Re}\, z > 0$ 便有 $\widehat{\Gamma}(z) = \Gamma(z)$。简要论证只要 $z, z+1$ 都在 $\widehat{\Gamma}(z)$ 解析区内，依然有递推性质 $\widehat{\Gamma}(z+1) = z\widehat{\Gamma}(z)$。

(d) 证明 $0, -1, -2, \ldots$ 等非正整数为解析延拓 $\widehat{\Gamma}(z)$ 的单极点。

(e) 求 $\mathrm{Res}_{z\to -n}\,\Gamma(z)$，$n \in \mathbb{N}$。

答:

(a) 使用分部积分

$$\Gamma(z+1) = \int_0^{+\infty} x^z e^{-x} dx = -\int_0^{+\infty} x^z d e^{-x} = -e^{-x} x^z\Big|_0^{+\infty} + \int_0^{+\infty} e^{-x} d x^z \tag{5.12}$$

$$= 0 + z\int_0^{+\infty} x^{z-1} e^{-x} dx = z\Gamma(z)\ . \tag{5.13}$$

注意，$\lim_{x\to+0} x^z = \lim_{x\to+0} x^{\mathrm{Re}\, z + i\,\mathrm{Im}\, z}$，只有当 $\mathrm{Re}\, z > 0$，这个极限才是零。

(b) 显然

$$\Gamma(1) = \int_0^{+\infty} e^{-x} dx = 1 \Rightarrow \Gamma(n+1) = \frac{\Gamma(n+1)}{\Gamma(n)}\frac{\Gamma(n)}{\Gamma(n-1)}\ldots\frac{\Gamma(2)}{\Gamma(1)}\Gamma(1) = n(n-1)\ldots 2\cdot 1 = n!\ . \tag{5.14}$$

(c) 设 $z, z+1$ 都在 $\widehat{\Gamma}(z)$ 的解析区。考虑差函数 $\Delta(z) \equiv \widehat{\Gamma}(z+1) - z\widehat{\Gamma(z)}$。显然,当 $z \in \mathrm{Re}\, z > 0$,这是一个零函数, 由题设知道, $\Delta(z)$ 的解析区域几乎铺满整个复平面, 除了一些孤立奇点。因此 $\Delta(z)$ 必然处处为零,因为我们可以用解析函数在解析区中零点的孤立性。因此,解析延拓以后,依然有 $\widehat{\Gamma}(z+1) = z\widehat{\Gamma}(z)$。

(d) 对 $\forall n = 0, 1, 2, 3, \ldots$

$$\frac{\Gamma(z)}{\Gamma(z+1)} = \frac{1}{z}\ , \qquad \frac{\Gamma(z+1)}{\Gamma(z+2)} = \frac{1}{z+1}, \quad \ldots \quad \frac{\Gamma(z+n)}{\Gamma(z+n+1)} = \frac{1}{z+n}\ . \tag{5.15}$$

乘起来，有

$$\Gamma(z) = \frac{\Gamma(z+n+1)}{z(z+1)\ldots(z+n)}\ , \tag{5.16}$$

于是

$$\Gamma(z) = \frac{1}{z+n} \times \frac{\Gamma(z+n+1)}{z(z+1)\ldots(z+n-1)}\ . \tag{5.17}$$

注意到，当 $z \to -n$, $z+n+1 \to +1 \in \mathrm{Re}\, z > 0$，于是第二个因子的分子和分母都在 $z = -n$ 附近解析，因此 $z = -n$ 是单极点。

(e) 记

$$\varphi(z) \equiv \frac{\widehat{\Gamma}(z+n+1)}{z(z+1)\ldots(z+n-1)}\ , \tag{5.18}$$

则 $\varphi(z)$ 是个在 $z=-n$ 处解析。因此

$$\mathrm{Res}_{z\to -n} = \frac{\varphi(-n)}{(z+n)'|_{z\to -n}} = \frac{\widehat{\Gamma}(1)}{(-n)(-n+1)...(-1)} = \frac{(-1)^n}{n!}\ . \tag{5.19}$$

3. 考虑以下定解问题

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} - 9\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = 0, \qquad 0<x<5, \quad t>0 \tag{5.20}$$

$$u(0,t)=0, \qquad u(5,t)=0, \qquad t\geq 0 \tag{5.21}$$

$$u\Big|_{t=0} = 4\sin(\pi x) - \sin(2\pi x) - 3\sin(5\pi x)\ , \qquad \frac{\partial u}{\partial t}\Big|_{t=0} = 0, \qquad 0\leq x\leq 5\ . \tag{5.22}$$

(a) 考虑变量分离的特殊解 $u=X(x)T(t)$，写出相应 X，T 的本征问题，并结合边界条件求解 X 的本征问题。

(b) 求解 T，并写下一般解。

(c) 利用初始条件确定一般解的系数。

答：(1a) 代入 $u=XT$，得到

$$\frac{d^2T}{dt^2}X - 9T\frac{d^2X}{dx^2} = 0 \Rightarrow \frac{1}{3^2 T}\frac{d^2T}{dt^2} = \frac{1}{X}\frac{d^2X}{dx^2} = -\lambda\ . \tag{5.23}$$

约化边界条件

$$X(0)=X(5)=0\ . \tag{5.24}$$

X 的本征问题

$$\frac{d^2X}{dx^2}X = -\lambda X, \qquad X(0)=X(5)=0\ . \tag{5.25}$$

当 $\lambda=\lambda_n\equiv\frac{n^2\pi^2}{5^2}$ 时，得到非平凡解

$$X_n = \sin\frac{n\pi x}{5}\ , \qquad n=1,2,3,\ldots \tag{5.26}$$

(1b) 于是 T 满足方程

$$\frac{d^2T}{dt^2} = -\frac{n^2\pi^2}{5^2}3^2 T\ . \tag{5.27}$$

于是解为

$$T_n(t) = A_n\cos\frac{3n\pi}{5}t + B_n\sin\frac{3n\pi}{5}t\ . \tag{5.28}$$

一般解为

$$u(x,t) = \sum_{n=1}^{\infty}(A_n\cos\frac{3n\pi}{5}t + B_n\sin\frac{3n\pi}{5}t)\sin\frac{n\pi}{5}x\ . \tag{5.29}$$

(1c) 由于 $\partial u/\partial t(t=0)=0$，有

$$B_n = 0 \Rightarrow u = \sum_{n=1}^{\infty} A_n \cos\frac{3n\pi}{5} t \sin\frac{n\pi x}{5} \ . \tag{5.30}$$

最后，

$$u(t=0) = \sum_{n=1}^{\infty} A_n \sin\frac{n\pi x}{5} = 4\sin(\pi x) - \sin(2\pi x) - 3\sin(5\pi x) \ , \tag{5.31}$$

从中可以读出

$$A_5 = 4, \qquad A_{10} = -1, \qquad A_{25} = -3, \qquad \text{其余 } A_n = 0 \ . \tag{5.32}$$

于是

$$u = 4\cos(3\pi t)\sin(\pi x) - \cos(6\pi t)\sin(2\pi x) - 3\cos(15\pi t)\sin(5\pi x) \ . \tag{5.33}$$

4. 求解下面定解问题

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0 \ , \qquad 0 < x < a, \quad 0 < y < b \tag{5.34}$$

$$\left.\frac{\partial u}{\partial x}\right|_{x=0} = \frac{u_0}{a} \ , \quad u(a,y) = u_1 + u_2 \cos\frac{\pi}{b} y \tag{5.35}$$

$$\left.\frac{\partial u}{\partial y}\right|_{y=0} = 0, \qquad \left.\frac{\partial u}{\partial y}\right|_{y=b} = 0 \ . \tag{5.36}$$

答：利用分解变量法设 $u(x,y) = X(x)Y(y)$，可以分解出

$$\frac{1}{X}\frac{d^2X}{dx^2} + \frac{1}{Y}\frac{d^2Y}{dy^2} = 0 \Rightarrow \frac{1}{X}\frac{d^2X}{dx^2} = -\frac{1}{Y}\frac{d^2Y}{dy^2} = +\lambda \ . \tag{5.37}$$

由于 y 方向的边界是齐次的，我们先求解 $Y(y)$。
当 $\lambda = 0$，$Y = Ay + B$，而边界条件要求 $A = 0$，因此有本征函数 $Y_0 = 1$。
当 $\lambda > 0$，$Y = A\cos(\sqrt{\lambda}y) + B\sin(\sqrt{\lambda}y)$，边界条件要求 $B = 0$，以及 $-\sqrt{\lambda}A\sin(\sqrt{\lambda}b) = 0$。因此

$$\lambda_n = \frac{n^2\pi^2}{b^2} \ , \qquad Y_n(y) = \cos\frac{n\pi}{b} y \ , \qquad n = 1, 2, \ldots \tag{5.38}$$

当 $\lambda < 0$，无解。
于是 X 满足

$$\frac{d^2X_n}{dx^2} = \lambda_n X_n \ , \tag{5.39}$$

当 $n = 0$，$\lambda_0 = 0$，$X_0 = Cx + D$。当 $n > 0$，有

$$X_n = C_n \cosh(\frac{\pi n}{b} x) + D_n \sinh(\frac{\pi n}{b} x) \ . \tag{5.40}$$

于是一般解为

$$u = C_0 x + D_0 + \sum_{n=1}^{\infty} \Big(C_n \cosh(\frac{\pi n}{b} x) + D_n \sinh(\frac{\pi n}{b} x) \Big) \cos \frac{n\pi}{b} y \tag{5.41}$$

x 方向的边界条件要求

$$C_0 + \sum_{n=1}^{\infty} D_n \frac{\pi n}{b} \cos \frac{n\pi}{b} y = \frac{u_0}{a} \Rightarrow C_0 = \frac{u_0}{a}, \qquad D_n = 0 \ , \tag{5.42}$$

以及

$$u(a,y) = \frac{u_0}{a} a + D_0 + \sum_{n=1}^{\infty} C_n \cosh(\frac{n\pi a}{b}) \cos \frac{n\pi}{b} y = u_1 + u_2 \cos \frac{\pi}{b} y \ , \tag{5.43}$$

因此

$$D_0 = u_1 - u_0 \ , \qquad C_1 = u_2 \Big(\cosh(\frac{\pi a}{b}) \Big)^{-1} \qquad C_{n>1} = 0 \ . \tag{5.44}$$

最后，

$$u(x,y) = \frac{u_0}{a} x + (u_1 - u_0) + \frac{u_2}{\cosh(\pi a/b)} \cos \frac{\pi}{b} y \tag{5.45}$$

6　第六次作业 (11 月 24 日课上交)

1. 扇形薄板，半径为 a，用坐标描述即 $\rho \le a$, $0 \le \phi \le \pi/2$。板面绝热，直边保持温度为 0 度，弧边保持温度为 $f(\phi) = u_0 \sin\phi \cos\phi$，其中 u_0 为常数，求稳定状态下板面上的温度分布 $u(\rho, \phi)$。

答：定解问题为

$$\nabla^2 u = \frac{1}{\rho} \frac{\partial}{\partial \rho} \left(\rho \frac{\partial u}{\partial \rho} \right) + \frac{1}{\rho^2} \frac{\partial^2 u}{\partial \phi^2} = 0 \quad (\rho < a, \ 0 < \phi < \pi), \tag{6.1}$$

$$u|_{\phi=0} = 0, \quad u|_{\phi=\pi/2} = 0, \tag{6.2}$$

$$u|_{\rho=a} = u_0 \sin\phi \cos\phi. \tag{6.3}$$

将 $u(\rho,\phi) = R(\rho)\Phi(\phi)$ 代入方程 (6.1)，得到两个方程

$$\rho^2 R''(\rho) + \rho R'(\rho) - \lambda R(\rho) = 0, \tag{6.4}$$

$$\Phi''(\phi) + \lambda \Phi(\phi) = 0, \tag{6.5}$$

其中 λ 是分离变量时引入的常数。由边界条件 (6.2) 得

$$R(\rho)\Phi(0) = R(\rho)\Phi(\pi/2) = 0, \tag{6.6}$$

故 $\Phi(0)=\Phi(\pi/2)=0$.

(1) 如果 $\lambda<0$，令 $\lambda=-\mu^2$ (其中 $\mu>0$)，则本征方程 (6.5) 的解为

$$\Phi(\phi)=Ce^{\mu\phi}+De^{-\mu\phi}. \tag{6.7}$$

从而，由 $0=\Phi(0)=C+D$ 得 $D=-C$；再由 $0=\Phi(\pi/2)=Ce^{\mu\pi/2}-Ce^{-\mu\pi/2}=2C\sinh(\mu\pi/2)$ 得 $C=0$。于是 $\Phi(\phi)\equiv 0$，这是平庸解。故 $\lambda<0$ 不是本征值。

(2) 如果 $\lambda=0$，则本征方程 (6.5) 的解为

$$\Phi(\phi)=C+D\phi. \tag{6.8}$$

由于 $0=\Phi(0)=C$，故 $C=0$；再由 $0=\Phi(\pi/2)=D\pi/2$ 得 $D=0$。于是 $\Phi(\phi)\equiv 0$，这是平庸解。故 $\lambda=0$ 也不是本征值。

(3) 如果 $\lambda>0$，令 $\lambda=\mu^2$ (其中 $\mu>0$)，则本征方程 (6.5) 的解为

$$\Phi(\phi)=C\sin\mu\phi+D\cos\mu\phi. \tag{6.9}$$

由于 $0=\Phi(0)=D$，故 $D=0$；再由 $0=\Phi(\pi/2)=C\sin(\mu\pi/2)$，可知仅当 $\sin(\mu\pi/2)=0$ 时存在非平庸解，此时有 $\mu\pi/2=m\pi$，即 $\mu=2m$ ($m\in\mathbb{N}^+$)。于是，本征值和本征函数是

$$\lambda_m=4m^2,\quad \Phi_m(\phi)=\sin 2m\phi,\quad m\in\mathbb{N}^+. \tag{6.10}$$

这个本征函数族在区间 $[0,\pi/2]$ 上是正交完备的，满足

$$\int_0^{\pi/2}\sin 2m\phi\,\sin 2n\phi\,d\phi=\frac{\pi}{4}\delta_{mn}. \tag{6.11}$$

将本征值 λ_m 代入方程 (6.4)，得

$$\rho^2R''_m(\rho)+\rho R'{}_m(\rho)-4m^2R_m(\rho)=0. \tag{6.12}$$

这是 Euler 方程，解为

$$R_m(\rho)=\{\rho^{2m},\rho^{-2m}\},\quad m\in\mathbb{N}^+. \tag{6.13}$$

在 $\rho=0$ 处，温度应该取有限值，而解 ρ^{-2m} 在 $\rho=0$ 处有奇性，应该舍弃。

从而，方程 (6.1) 的一般解可以写成

$$u(\rho,\phi)=\sum_{m=1}^{\infty}A_m\left(\frac{\rho}{a}\right)^{2m}\sin 2m\phi. \tag{6.14}$$

代入边界条件 (6.3)，可得

$$\frac{u_0}{2}\sin 2\phi=u(a,\phi)=\sum_{m=1}^{\infty}A_m\sin 2m\phi. \tag{6.15}$$

比较两边，得

$$A_1 = \frac{u_0}{2}, \quad A_m = 0\ (m \geq 2). \tag{6.16}$$

于是，板面上的温度分布为

$$u(\rho, \phi) = \frac{u_0 \rho^2}{2a^2} \sin 2\phi. \tag{6.17}$$

2. 计算下列函数 $f(x)$ 的 Fourier 变换 $F(k)$。

(1) $f(x) = \begin{cases} \cos x, & |x| < \pi/2, \\ 0, & |x| > \pi/2. \end{cases}$

答：Fourier 变换

$$\begin{aligned} F(k) &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} f(x) e^{-ikx} dx = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\pi/2}^{\pi/2} \cos x e^{-ikx} dx = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\pi/2}^{\pi/2} \cos x \cos kx\, dx \\ &= \frac{2}{\sqrt{2\pi}} \int_0^{\pi/2} \cos x \cos kx\, dx = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_0^{\pi/2} \{\cos[(1+k)x] + \cos[(1-k)x]\}\, dx \\ &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \left\{ \frac{\sin[(1+k)x]}{1+k} + \frac{\sin[(1-k)x]}{1-k} \right\} \Bigg|_0^{\pi/2} = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \left\{ \frac{\sin[(1+k)\pi/2]}{1+k} + \frac{\sin[(1-k)\pi/2]}{1-k} \right\} \\ &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \left\{ \frac{\cos(k\pi/2)}{1+k} + \frac{\cos(k\pi/2)}{1-k} \right\} = \frac{\sqrt{2} \cos(k\pi/2)}{\sqrt{\pi}(1-k^2)}. \end{aligned} \tag{6.18}$$

(2) $f(x) = \sin^2 3x$.

答：Fourier 变换

$$\begin{aligned} F(k) &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} \sin^2 3x\, e^{-ikx} dx = \frac{1}{2\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} (1 - \cos 6x)\, e^{-ikx} dx \\ &= \frac{1}{2\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-ikx} dx - \frac{1}{4\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} (e^{6ix} + e^{-6ix})\, e^{-ikx} dx \\ &= = \sqrt{\frac{\pi}{2}} \delta(k) - \frac{1}{4\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} [e^{-i(k-6)x} + e^{-i(k+6)x}]\, dx \\ &= \sqrt{\frac{\pi}{2}} \delta(k) - \frac{\sqrt{\pi}}{2\sqrt{2}} [\delta(k-6) + \delta(k+6)] = \sqrt{\frac{\pi}{2}} \left[\delta(k) - \frac{1}{2} \delta(k-6) - \frac{1}{2} \delta(k+6) \right]. \end{aligned} \tag{6.19}$$

3. 用 Fourier 变换法求解以下定解问题,

$$\frac{\partial u}{\partial t} - t \frac{\partial u}{\partial x} = 0 \quad (-\infty < x < +\infty, \quad t > 0), \tag{6.20}$$

$$u|_{t=0} = f(x) \quad (-\infty < x < +\infty), \tag{6.21}$$

$$u|_{x=\pm\infty} = 0. \tag{6.22}$$

答：x 的变化范围是 $(-\infty, +\infty)$，可以对 x 作 Fourier 变换。设

$$u(x,t) \leftrightarrow U(k,t), \quad f(x) \leftrightarrow F(k). \tag{6.23}$$

由微分定理得 $\mathscr{F}(\partial u/\partial x) = ikU$，故

$$\frac{dU}{dt} - iktU = 0, \tag{6.24}$$
$$U|_{t=0} = F(k). \tag{6.25}$$

对方程 (6.24) 移项，得

$$\frac{dU}{U} = ikt. \tag{6.26}$$

对上式右边从 $t=0$ 积分至 $t=t_1$，有

$$ik\int_0^{t_1} tdt = \left.\frac{ikt^2}{2}\right|_0^{t_1} = \frac{ikt_1^2}{2}; \tag{6.27}$$

相应地，左边从 $U = U|_{t=0} = F(k)$ 积分至 $U = U(k,t_1)$，得

$$\int_{F(k)}^{U(k,t_1)} \frac{dU}{U} = \ln U|_{F(k)}^{U(k,t_1)} = \ln\frac{U(k,t_1)}{F(k)}. \tag{6.28}$$

从而导出

$$\ln\frac{U(k,t_1)}{F(k)} = \frac{ikt_1^2}{2}. \tag{6.29}$$

于是求得

$$U(k,t) = e^{ikt^2/2}F(k). \tag{6.30}$$

作 Fourier 反变换，利用延迟定理，得

$$u(x,t) = \mathscr{F}^{-1}[e^{ikt^2/2}F(k)] = f\left(x + \frac{t^2}{2}\right). \tag{6.31}$$

4. 设 $f(x) \leftrightarrow F(k)$，$a \in \mathbb{R}$，求证

$$\delta(x+a) * f(x) \leftrightarrow \frac{e^{ika}}{\sqrt{2\pi}}F(k). \tag{6.32}$$

证明：（方法一）依照卷积定义，有

$$\delta(x+a) * f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{+\infty} \delta(\xi+a)f(x-\xi)d\xi = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}f(x+a). \tag{6.33}$$

由延迟定理有 $f(x+a) \leftrightarrow e^{ika}F(k)$，再根据线性定理，得

$$\delta(x+a) * f(x) \leftrightarrow \frac{e^{ika}}{\sqrt{2\pi}}F(k). \tag{6.34}$$

（方法二）$\delta(x+a)$ 可表达为

$$\delta(x+a) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} e^{ik(x+a)}dk = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty} \frac{e^{ika}}{\sqrt{2\pi}}e^{ikx}dk, \tag{6.35}$$

可见,

$$\delta(x+a) \leftrightarrow \frac{e^{ika}}{\sqrt{2\pi}}. \tag{6.36}$$

应用卷积定理，得

$$\delta(x+a) * f(x) \leftrightarrow \frac{e^{ika}}{\sqrt{2\pi}}F(k). \tag{6.37}$$

7 第七次作业 (12 月 8 日课上交)

1. 用 Fourier 变换法求解如下定解问题,

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0 \quad (-\infty < x < +\infty, \quad y > 0), \tag{7.1}$$

$$u|_{y=0} = \delta(x - x_0), \quad u|_{y=+\infty} = 0, \tag{7.2}$$

$$u|_{x=\pm\infty} = 0, \tag{7.3}$$

其中 x_0 为实常数。提示：可能会用到积分公式

$$\int_0^{\infty} e^{-ax}\cos bx\, dx = \frac{a}{a^2+b^2}, \quad a > 0. \tag{7.4}$$

答：由于 x 的变化范围是 $(-\infty, +\infty)$，可以对 x 作 Fourier 变换，设

$$u(x,y) \leftrightarrow U(k,y). \tag{7.5}$$

根据 $\delta(x) \leftrightarrow 1/\sqrt{2\pi}$ 和延迟定理，有

$$\delta(x - x_0) \leftrightarrow \frac{e^{-ikx_0}}{\sqrt{2\pi}}. \tag{7.6}$$

利用微分定理，对定解问题中各式作 Fourier 变换，可得

$$\frac{d^2U}{dy^2} - k^2U = 0, \tag{7.7}$$

$$U|_{y=0} = \frac{e^{-ikx_0}}{\sqrt{2\pi}}, \tag{7.8}$$

$$U|_{y=+\infty} = 0. \tag{7.9}$$

方程 (7.7) 的解为

$$U(k,y) = C(k)e^{ky} + D(k)e^{-ky}. \tag{7.10}$$

代入 (7.8) 式，得

$$\frac{e^{-ikx_0}}{\sqrt{2\pi}} = U|_{y=0} = C(k) + D(k). \tag{7.11}$$

当 $k > 0$ 时，由 (7.9) 式得

$$0 = U|_{y=+\infty} = \lim_{y\to\infty} C(k)e^{ky}, \tag{7.12}$$

故

$$C(k) = 0, \quad D(k) = \frac{e^{-ikx_0}}{\sqrt{2\pi}}, \quad U(k,y) = D(k)e^{-ky} = \frac{e^{-ikx_0}}{\sqrt{2\pi}}\, e^{-|k|y}. \tag{7.13}$$

当 $k < 0$ 时，由 (7.9) 式得

$$0 = U|_{y=+\infty} = \lim_{y\to\infty} D(k)e^{-ky}, \tag{7.14}$$

故

$$D(k) = 0, \quad C(k) = \frac{e^{-ikx_0}}{\sqrt{2\pi}}, \quad U(k,y) = C(k)e^{ky} = \frac{e^{-ikx_0}}{\sqrt{2\pi}}\, e^{-|k|y}. \tag{7.15}$$

因此，$k > 0$ 和 $k < 0$ 两种情况的解可以归纳为

$$U(k,y) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\, e^{-ikx_0}e^{-|k|y}. \tag{7.16}$$

利用积分项关于 k 的奇偶性，根据积分公式 (7.4)，可得 $e^{-|k|y}$ 的原函数为

$$\begin{aligned}\mathscr{F}^{-1}(e^{-|k|y}) &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-|k|y}e^{ikx}dk = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-|k|y}\cos kx\, dk \\ &= \sqrt{\frac{2}{\pi}}\int_0^{\infty} e^{-ky}\cos kx\, dk = \sqrt{\frac{2}{\pi}}\frac{y}{x^2+y^2}.\end{aligned} \tag{7.17}$$

由线性定理和延迟定理得

$$\begin{aligned}u(x,y) &= \mathcal{F}^{-1}[U(k,y)] = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\mathcal{F}^{-1}(e^{-ikx_0}e^{-|k|y}) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\sqrt{\frac{2}{\pi}}\frac{y}{(x-x_0)^2+y^2} \\ &= \frac{y}{\pi[(x-x_0)^2+y^2]}.\end{aligned} \tag{7.18}$$

2. 试在平面极坐标系中对二维输运方程

$$\frac{\partial u}{\partial t} - a^2\nabla^2 u = 0 \tag{7.19}$$

分离变量，写出分离变量后的常微分方程。

答：在平面极坐标系中，二维齐次输运方程表达为

$$\frac{\partial u}{\partial t} - \frac{a^2}{\rho}\frac{\partial}{\partial\rho}\left(\rho\frac{\partial u}{\partial\rho}\right) - \frac{a^2}{\rho^2}\frac{\partial^2 u}{\partial\phi^2} = 0. \tag{7.20}$$

令 $u(\rho,\phi,t)=R(\rho)\Phi(\phi)T(t)$，代入上式得

$$R\Phi T'-\frac{a^2}{\rho}\Phi T(\rho R''+R')-\frac{a^2}{\rho^2}RT\Phi''=0, \tag{7.21}$$

整理一下，有

$$\frac{T'}{a^2T}=\frac{1}{\rho R}(\rho R''+R')+\frac{1}{\rho^2}\frac{\Phi''}{\Phi}. \tag{7.22}$$

上式左边与 ρ、ϕ 无关，右边与 t 无关，因而与 ρ、ϕ、t 均无关，即为常数，记作 $-\lambda$。从而得到两个方程

$$T'+\lambda a^2T=0 \tag{7.23}$$

和

$$\frac{1}{R}(\rho^2R''+\rho R')+\lambda\rho^2=-\frac{\Phi''}{\Phi}. \tag{7.24}$$

其中，第二个方程左边与 ϕ 无关，右边与 ρ 无关，因而与 ρ、ϕ 均无关，即为常数，记作 μ。于是导出两个方程

$$\rho^2R''+\rho R'+(\lambda\rho^2-\mu)R=0 \tag{7.25}$$

和

$$\Phi''+\mu\Phi=0. \tag{7.26}$$

3. 微观粒子在中心力场 $V(r)$ 中的定态 Schrödinger 方程是

$$-\frac{\hbar^2}{2\mu}\nabla^2u+V(r)u=Eu, \tag{7.27}$$

其中 $u(r,\theta,\phi)$ 是波函数，μ 是粒子质量，E 是能量，$\hbar$ 是约化 Planck 常数。试在球坐标系中对该方程分离变量。

答：在球坐标系中，可以将方程 (7.27) 表达为

$$-\frac{\hbar^2}{2\mu}\left[\frac{1}{r^2}\frac{\partial}{\partial r}\left(r^2\frac{\partial u}{\partial r}\right)+\frac{1}{r^2\sin\theta}\frac{\partial}{\partial\theta}\left(\sin\theta\frac{\partial u}{\partial\theta}\right)+\frac{1}{r^2\sin^2\theta}\frac{\partial^2u}{\partial\phi^2}\right]+V(r)u=Eu. \tag{7.28}$$

令 $u(r,\theta,\phi)=R(r)Y(\theta,\phi)$，代入上式得

$$-\frac{\hbar^2}{2\mu}\left[\frac{Y}{r^2}\frac{d}{dr}\left(r^2\frac{dR}{dr}\right)+\frac{R}{r^2\sin\theta}\frac{\partial}{\partial\theta}\left(\sin\theta\frac{\partial Y}{\partial\theta}\right)+\frac{R}{r^2\sin^2\theta}\frac{\partial^2Y}{\partial\phi^2}\right]+V(r)RY=ERY, \tag{7.29}$$

整理一下，有

$$-\frac{\hbar^2}{2\mu R}\left[\frac{d}{dr}\left(r^2\frac{dR}{dr}\right)\right]+[V(r)-E]r^2=\frac{\hbar^2}{2\mu Y}\left[\frac{1}{\sin\theta}\frac{\partial}{\partial\theta}\left(\sin\theta\frac{\partial Y}{\partial\theta}\right)+\frac{1}{\sin^2\theta}\frac{\partial^2Y}{\partial\phi^2}\right]. \tag{7.30}$$

上式左边与 θ、ϕ 无关，右边与 r 无关，因而与 r、θ、ϕ 均无关，即为常数，记作 λ。从而得到径向方程

$$r^2R'' + 2rR' - \frac{2\mu}{\hbar^2}[(V-E)r^2 - \lambda]R = 0, \tag{7.31}$$

和角向方程

$$\frac{\hbar^2}{2\mu}\left[\frac{1}{\sin\theta}\frac{\partial}{\partial\theta}\left(\sin\theta\frac{\partial Y}{\partial\theta}\right) + \frac{1}{\sin^2\theta}\frac{\partial^2 Y}{\partial\phi^2}\right] - \lambda Y = 0. \tag{7.32}$$

对角向方程可以进一步分离变量。令 $Y(\theta,\phi) = H(\theta)\Phi(\phi)$，代入角向方程，有

$$\frac{\hbar^2}{2\mu}\left[\frac{\Phi}{\sin\theta}\frac{d}{d\theta}\left(\sin\theta\frac{dH}{d\theta}\right) + \frac{H}{\sin^2\theta}\frac{d^2\Phi}{d\phi^2}\right] - \lambda H\Phi = 0. \tag{7.33}$$

整理，得

$$\frac{1}{H}\left[\sin\theta\frac{d}{d\theta}\left(\sin\theta\frac{dH}{d\theta}\right)\right] - \frac{2\mu\lambda}{\hbar^2}\sin^2\theta = -\frac{1}{\Phi}\frac{d^2\Phi}{d\phi^2}. \tag{7.34}$$

上式左边与 ϕ 无关，右边与 θ 无关，因而与 θ、ϕ 均无关，即为常数，记作 ν。从而导出两个方程：

$$\frac{1}{\sin\theta}\frac{d}{d\theta}\left(\sin\theta\frac{dH}{d\theta}\right) - \left(\frac{2\mu\lambda}{\hbar^2} + \frac{\nu}{\sin^2\theta}\right)H = 0 \tag{7.35}$$

和

$$\Phi'' + \nu\Phi = 0. \tag{7.36}$$

8 第八次作业 (12 月 22 日课上交)

1. 在 $x_0 = 0$ 的邻域用级数法求解 Airy 方程

$$y'' - xy = 0. \tag{8.1}$$

设

$$y(x) = \sum_{k=0}^{\infty} a_k x^k, \tag{8.2}$$

则解可以写成

$$y(x) = a_0\, y_0(x) + a_1\, y_1(x), \tag{8.3}$$

求出 $y_0(x)$ 和 $y_1(x)$ 的具体形式。

答：将

$$y'' = \sum_{k=0}^{\infty} k(k-1)a_k x^{k-2} = 2a_2 + \sum_{k=3}^{\infty} k(k-1)a_k x^{k-2} = 2a_2 + \sum_{k=0}^{\infty}(k+3)(k+2)a_{k+3}x^{k+1}, \tag{8.4}$$

$$xy = \sum_{k=0}^{\infty} a_k x^{k+1} \tag{8.5}$$

代入 Airy 方程(8.1)，得

$$2a_2+\sum_{k=0}^{\infty}[(k+3)(k+2)a_{k+3}-a_k]x^{k+1}=0, \tag{8.6}$$

从而有

$$a_2=0,\quad a_{k+3}=\frac{a_k}{(k+3)(k+2)},\quad k\in\mathbb{N}. \tag{8.7}$$

根据这个递推关系，所有 a_{3k} $(k\in\mathbb{N}^+)$ 均可由 a_0 确定，所有 a_{3k+1} $(k\in\mathbb{N}^+)$ 均可由 a_1 确定，所有 a_{3k+2} $(k\in\mathbb{N}^+)$ 均由 $a_2=0$ 确定为零。

对于 $k\in\mathbb{N}^+$，反复递推关系，推出

$$\begin{aligned}
a_{3k} &= \frac{a_{3k-3}}{3k(3k-1)}=\frac{a_{3k-6}}{3k(3k-1)(3k-3)(3k-4)}\\
&=\cdots=\frac{a_{3k-3n}}{3k(3k-1)(3k-3)(3k-4)\cdots(3k-3n+3)(3k-3n+2)}\\
&=\cdots=\frac{a_3}{3k(3k-1)(3k-3)(3k-4)\cdots6\cdot5}\\
&=\frac{a_0}{3k(3k-1)(3k-3)(3k-4)\cdots6\cdot5\cdot3\cdot2}\\
&=\frac{1\cdot4\cdot7\cdots(2k-5)(3k-2)}{(3k)!}a_0,
\end{aligned} \tag{8.8}$$

$$\begin{aligned}
a_{3k+1} &= \frac{a_{3k-2}}{(3k+1)3k}=\frac{a_{3k-5}}{(3k+1)3k(3k-2)(3k-3)}\\
&=\cdots=\frac{a_{3k-3n+1}}{(3k+1)3k(3k-2)(3k-3)\cdots(3k-3n+4)(3k-3n+3)}\\
&=\cdots=\frac{a_4}{(3k+1)3k(3k-2)(3k-3)\cdots7\cdot6}\\
&=\frac{a_1}{(3k+1)3k(3k-2)(3k-3)\cdots7\cdot6\cdot4\cdot3}\\
&=\frac{2\cdot5\cdot8\cdots(3k-1)}{(3k+1)!}a_1.
\end{aligned} \tag{8.9}$$

故 $y_0(x)$ 和 $y_1(x)$ 的具体形式为

$$\begin{aligned}
y_0(x) &= \sum_{k=0}^{\infty}\frac{a_{3k}}{a_0}x^{2k}=1+\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1\cdot4\cdot7\cdots(2k-5)(3k-2)}{(3k)!}x^{3k}\\
&=1+\frac{1}{3!}x^3+\frac{1\cdot4}{6!}x^6+\cdots+\frac{1\cdot4\cdot7\cdots(2k-5)(3k-2)}{(3k)!}x^{3k}+\cdots,
\end{aligned} \tag{8.10}$$

$$\begin{aligned}
y_1(x) &= \sum_{k=0}^{\infty}\frac{a_{3k+1}}{a_1}x^{2k+1}=x+\sum_{k=1}^{\infty}\frac{2\cdot5\cdot8\cdots(3k-1)}{(3k+1)!}x^{3k+1}\\
&=x+\frac{2}{4!}x^4+\frac{2\cdot5}{7!}x^7+\cdots+\frac{2\cdot5\cdot8\cdots(3k-1)}{(3k+1)!}x^{3k+1}+\cdots
\end{aligned} \tag{8.11}$$

2. 在 $x_0=0$ 的邻域上求解 Laguerre 方程

$$xy''+(1-x)y'+\lambda y=0. \tag{8.12}$$

(1) 当 λ 取何值时可以使级数解退化为多项式?

(2) 适当选取级数解中的任意常数，可以使多项式解的最高次幂项具有 $(-x)^n$ 形式，这些多项式称为 Laguerre 多项式，记作 $\mathrm{L}_n(x)$。求出 Laguerre 多项式的显式。

(3) 写出前 4 个 Laguerre 多项式的具体形式。

答：(1) 将 Laguerre 方程 (8.12) 化为

$$y''+\frac{1-x}{x}y'+\frac{\lambda}{x}y=0. \tag{8.13}$$

可见，$x=0$ 是方程的正则奇点。在 $x_0=0$ 的去心邻域内，可设解的形式为

$$y(x)=\sum_{k=0}^{\infty}a_kx^{k+s},\quad a_0\neq 0, \tag{8.14}$$

则有

$$y''=\sum_{k=0}^{\infty}(k+s)(k+s-1)a_kx^{k+s-2},\quad y'=\sum_{k=0}^{\infty}(k+s)a_kx^{k+s-1}. \tag{8.15}$$

代入 Laguerre 方程 (8.12)，得

$$\sum_{k=0}^{\infty}[(k+s)(k+s-1)a_kx^{k+s-1}+(k+s)a_kx^{k+s-1}-(k+s)a_kx^{k+s}+\lambda a_kx^{k+s}]=0. \tag{8.16}$$

故

$$\begin{aligned}0&=\sum_{k=0}^{\infty}(k+s)^2a_kx^{k+s-1}+\sum_{k=0}^{\infty}[\lambda-(k+s)]a_kx^{k+s}\\&=s^2a_0x^{s-1}+\sum_{k=1}^{\infty}(k+s)^2a_kx^{k+s-1}+\sum_{k=0}^{\infty}[\lambda-(k+s)]a_kx^{k+s}\\&=s^2a_0x^{s-1}+\sum_{k=0}^{\infty}[(k+s+1)^2a_{k+1}+(\lambda-k-s)a_k]x^{k+s}.\end{aligned} \tag{8.17}$$

上式各项系数必须为零。由于 $a_0\neq 0$，即得

$$s=0, \tag{8.18}$$

以及递推关系

$$a_{k+1}=\frac{k-\lambda}{(k+1)^2}a_k,\quad k\in\mathbb{N}. \tag{8.19}$$

可以看出，如果

$$\lambda = n, \quad n \in \mathbb{N}, \tag{8.20}$$

则 $a_{n+1} = a_{n+2} = \cdots = 0$，即解 $y(x)$ 中断为 n 次多项式。

(2) 将 $\lambda = n$ 代入递推关系 (8.19)，得

$$a_{k+1} = \frac{k-n}{(k+1)^2}\, a_k, \tag{8.21}$$

可改写成

$$a_k = \frac{k-n-1}{k^2}\, a_{k-1}. \tag{8.22}$$

接下来有两种解法。

（解法一）

反复利用递推关系，可以推出

$$\begin{aligned} a_k &= \frac{k-n-1}{k^2} a_{k-1} = \frac{(k-n-1)(k-n-2)}{[k(k-1)]^2} a_{k-2} = \cdots \\ &= \frac{(k-n-1)(k-n-2)\cdots(1-n)(0-n)}{[k(k-1)\cdots 2\cdot 1]^2} a_0 \\ &= \frac{(-)^k n(n-1)\cdots(n-k+2)(n-k+1)}{(k!)^2} a_0 = \frac{(-)^k n!}{(n-k)!(k!)^2} a_0, \end{aligned} \tag{8.23}$$

从而

$$a_n = \frac{(-)^n n!}{(n-n)!(n!)^2} a_0 = \frac{(-)^n}{n!} a_0. \tag{8.24}$$

适当选取 a_0，使多项式解的最高次幂项具有 $(-x)^n$ 形式，即 $a_n = (-)^n$，故

$$a_0 = n!\,. \tag{8.25}$$

于是，Laguerre 多项式的显式为

$$\mathrm{L}_n(x) = \sum_{k=0}^{n} \frac{(-)^k n!}{(n-k)!(k!)^2}\, a_0 x^k = \sum_{k=0}^{n} \frac{(n!)^2}{(n-k)!(k!)^2}\, (-x)^k. \tag{8.26}$$

（解法二）

适当选取 a_0，使多项式解的最高次幂项具有 $(-x)^n$ 形式，即

$$a_n = (-)^n. \tag{8.27}$$

将递推关系 (8.22) 改写为

$$a_{k-1} = \frac{k^2}{k-n-1}\, a_k, \tag{8.28}$$

从而可得

$$a_{n-1} = \frac{n^2}{n-n-1}a_n = (-)^{n-1}n^2 = \frac{(-)^{n-1}}{1!}\left[\frac{n!}{(n-1)}\right]^2, \tag{8.29}$$

$$a_{n-2} = \frac{(n-1)^2}{(n-1)-n-1}a_{n-1} = \frac{(-)^{n-2}}{2\cdot 1}[n(n-1)]^2 = \frac{(-)^{n-2}}{2!}\left[\frac{n!}{(n-2)!}\right]^2. \tag{8.30}$$

由此推测一般系数为

$$a_{n-k} = \frac{(-)^{n-k}(n!)^2}{k![(n-k)!]^2}, \quad k = 0, 1, \cdots, n. \tag{8.31}$$

接着，用数学归纳法证明一般系数的表达式 (8.31)。由

$$a_n = (-)^n = \frac{(-)^{n-0}(n!)^2}{0![(n-0)!]^2} \tag{8.32}$$

可知 (8.31) 式对 $k=0$ 成立。

假设当 $k=m$ $(0 \le m \le n-1)$ 时，(8.31) 式成立，即

$$a_{n-m} = \frac{(-)^{n-m}(n!)^2}{m![(n-m)!]^2}. \tag{8.33}$$

那么，根据递推关系 (8.28) 可以推出

$$a_{n-m-1} = \frac{(n-m)^2}{(n-m)-n-1}a_{n-m} = \frac{(n-m)^2}{-(m+1)}\frac{(-)^{n-m}(n!)^2}{m![(n-m)!]^2} = \frac{(-)^{n-m-1}(n!)^2}{(m+1)![(n-m-1)!]^2}. \tag{8.34}$$

可见，(8.31) 式对 $k=m+1$ 也成立。

因此，(8.31) 式对任意 $k=0,1,\cdots,n$ 成立。证毕。

根据一般系数 (8.31)，Laguerre 多项式的显式为

$$\mathrm{L}_n(x) = \sum_{k=0}^{n}\frac{(n!)^2}{k![(n-k)!]^2}(-x)^{n-k}. \tag{8.35}$$

上式与 (8.26) 式等价。

(3) 前 4 个 Laguerre 多项式的具体形式为

$$\mathrm{L}_0(x) = \frac{(0!)^2}{0![(0-0)!]^2}(-x)^{0-0} = 1, \tag{8.36}$$

$$\mathrm{L}_1(x) = \frac{(1!)^2}{0![(1-0)!]^2}(-x)^{1-0} + \frac{(1!)^2}{1![(1-1)!]^2}(-x)^{1-1} = -x+1, \tag{8.37}$$

$$\mathrm{L}_2(x) = \frac{(2!)^2}{0![(2-0)!]^2}(-x)^{2-0} + \frac{(2!)^2}{1![(2-1)!]^2}(-x)^{2-1} + \frac{(2!)^2}{2![(2-2)!]^2}(-x)^{2-2} = x^2-4x+2, \tag{8.38}$$

$$\begin{aligned}\mathrm{L}_3(x) &= \frac{(3!)^2}{0![(3-0)!]^2}(-x)^{3-0} + \frac{(3!)^2}{1![(3-1)!]^2}(-x)^{3-1} + \frac{(3!)^2}{2![(3-2)!]^2}(-x)^{3-2} + \frac{(3!)^2}{3![(3-3)!]^2}(-x)^{3-3} \\ &= -x^3+9x^2-18x+6.\end{aligned} \tag{8.39}$$

3. 求解以下定解问题，

$$\frac{\partial u}{\partial t} - a^2\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = 0 \quad (0 < x < l, \quad t > 0), \tag{8.40}$$

$$\left.\frac{\partial u}{\partial x}\right|_{x=0} = 0, \quad \left.\left(\frac{\partial u}{\partial x} + hu\right)\right|_{x=l} = 0, \tag{8.41}$$

$$u|_{t=0} = \varphi(x), \tag{8.42}$$

其中 $a > 0$，$h > 0$。

答：分离变量，设

$$u(x,t) = X(x)T(t), \tag{8.43}$$

代入方程 (8.40)，得

$$XT' - a^2X''T = 0, \tag{8.44}$$

即

$$\frac{X''}{X} = \frac{T'}{a^2T}. \tag{8.45}$$

上式左边与 t 无关，右边与 x 无关，因而与 t、x 均无关，是常数，记作 $-\lambda$。从而得到两个方程

$$T' + \lambda a^2T = 0, \tag{8.46}$$

$$X'' + \lambda X = 0. \tag{8.47}$$

另一方面，边界条件 (8.41) 化为

$$X'(0)T(t) = 0, \quad [X'(l) + hX(l)]T(t) = 0. \tag{8.48}$$

$T(t)$ 不恒为零，故

$$X'(0) = 0, \quad X'(l) + hX(l) = 0. \tag{8.49}$$

上式与方程 (8.47) 构成 Sturm-Liouville 本征值问题，权函数 $\rho(x) = 1$，因此本征值非负，即 $\lambda \geq 0$。

(1) 如果 $\lambda = 0$，则方程 (8.47) 的解为

$$X(x) = Cx + D. \tag{8.50}$$

代入 (8.49) 式，得 $X'(0) = C = 0$，$X'(l) + hX(l) = hD = 0$。由于 $h > 0$，必有 $D = 0$。这是平庸解，故 $\lambda = 0$ 不是本征值。

(2) 如果 $\lambda > 0$，令 $\lambda = \mu^2$（其中 $\mu > 0$），则方程 (8.47) 的解为

$$X(x) = C\cos\mu x + D\sin\mu x. \tag{8.51}$$

代入 (8.49) 式，得 $X'(0) = D = 0$，$X'(l) + hX(l) = C(-\mu\sin\mu l + h\cos\mu l) = 0$，故非平庸解的存在要求 $\mu\sin\mu l = h\cos\mu l$，亦即要求

$$\cot\mu l = \frac{\mu}{h}. \tag{8.52}$$

这是一个超越方程，没有解析解。将它的无穷多个分立的解记为 μ_n，其中 $n \in \mathbb{N}^+$。它们对应于无穷多个分立的本征值 $\lambda_n = \mu_n^2$，相应的本征函数族是 $\{\cos \mu_n x\}_{n=1}^{\infty}$。

将本征值 λ_n 代入方程 (8.46)，得到的解为

$$T_n(t) = A_n \exp(-\lambda_n a^2 t). \tag{8.53}$$

于是，$u(x,t)$ 的一般解可以写成

$$u(x,t) = \sum_{n=1}^{\infty} A_n \exp(-\lambda_n a^2 t) \cos \mu_n x. \tag{8.54}$$

代入初始条件 (8.42)，得

$$\varphi(x) = \sum_{n=1}^{\infty} A_n \cos \mu_n x. \tag{8.55}$$

另一方面，根据 Sturm-Liouville 本征值问题的一般结论，本征函数族 $\{\cos \mu_n x\}_{n=1}^{\infty}$ 在区间 $[0,l]$ 上是正交完备的，而上式实际上就是 $\varphi(x)$ 的广义 Fourier 级数展开式，因此展开系数可通过下式计算：

$$A_n = \frac{\int_0^l \varphi(x) \cos \mu_n x \, dx}{\int_0^l \cos^2 \mu_n x \, dx}. \tag{8.56}$$

将展开系数代入 (8.54) 式，就得到定解问题的解。

9 第九次作业 (1 月 5 日课上交)

1. 在 $r > a$ 的球外区域求解以下定解问题，

$$\begin{aligned} &\nabla^2 u = 0 \quad (r > a), \\ &\left.\frac{\partial u}{\partial r}\right|_{r=a} = \frac{\cos 2\theta}{a}, \qquad u|_{r=\infty} = 0. \end{aligned} \tag{9.1}$$

答：这是一个轴对称问题，一般解可以写作

$$u(r,\theta) = \sum_{l=0}^{\infty} \left(A_l r^l + \frac{B_l}{r^{l+1}} \right) \mathrm{P}_l(\cos\theta). \tag{9.2}$$

由无穷远处的边界条件 $u|_{r=\infty} = 0$ 可知 $A_l = 0$ $(l \in \mathbb{N})$，解化为

$$u(r,\theta) = \sum_{l=0}^{\infty} \frac{B_l}{r^{l+1}} \mathrm{P}_l(\cos\theta). \tag{9.3}$$

由

$$\mathrm{P}_0(x) = 1, \quad \mathrm{P}_2(x) = \frac{1}{2}(3x^2 - 1) = \frac{1}{2}[3x^2 - \mathrm{P}_0(x)], \quad x^2 = \frac{1}{3}\mathrm{P}_0(x) + \frac{2}{3}\mathrm{P}_2(x), \tag{9.4}$$

得

$$\cos 2\theta = 2\cos^2\theta - 1 = 2\left[\frac{1}{3}\,\mathrm{P}_0(\cos\theta) + \frac{2}{3}\,\mathrm{P}_2(\cos\theta)\right] - \mathrm{P}_0(\cos\theta) = -\frac{1}{3}\,\mathrm{P}_0(\cos\theta) + \frac{4}{3}\,\mathrm{P}_2(\cos\theta), \tag{9.5}$$

故 $r = a$ 处的边界条件可以改写为

$$\left.\frac{\partial u}{\partial r}\right|_{r=a} = \frac{\cos 2\theta}{a} = -\frac{1}{3a}\,\mathrm{P}_0(\cos\theta) + \frac{4}{3a}\,\mathrm{P}_2(\cos\theta). \tag{9.6}$$

将解代入上式，得

$$-\sum_{l=0}^{\infty} \frac{(l+1)B_l}{a^{l+2}}\,\mathrm{P}_l(\cos\theta) = -\frac{1}{3a}\,\mathrm{P}_0(\cos\theta) + \frac{4}{3a}\,\mathrm{P}_2(\cos\theta). \tag{9.7}$$

比较等式两边，可知非零系数只有 B_0 和 B_2，满足

$$-\frac{B_0}{a^2} = -\frac{1}{3a}, \quad -\frac{3B_2}{a^4} = \frac{4}{3a}, \tag{9.8}$$

故

$$B_0 = \frac{a}{3}, \quad B_2 = -\frac{4a^3}{9}, \quad B_l = 0\ (l \neq 0, 2). \tag{9.9}$$

于是，定解问题的解为

$$u(r,\theta) = \frac{B_0}{r}\,\mathrm{P}_0(\cos\theta) + \frac{B_2}{r^3}\,\mathrm{P}_2(\cos\theta) = \frac{a}{3r} - \frac{4a^3}{9r^3}\,\mathrm{P}_2(\cos\theta). \tag{9.10}$$

2. 已知半径为 a 的球面上的电势为 $u|_{r=a} = \sin^2\theta\cos^2\phi$，球内外均没有电荷，将电势零点取在无穷远处，求空间各处的电势分布。

答：定解问题为

$$\nabla^2 u = 0 \quad (r < a,\ r > a), \tag{9.11}$$

$$u|_{r=a} = \sin^2\theta\cos^2\phi, \quad u|_{r=\infty} = 0. \tag{9.12}$$

令 $u(\mathbf{r}) = R(r)H(\theta)\Phi(\phi)$，对 Laplace 方程 (9.11) 分离变量。考虑到关于 ϕ 的周期性边界条件，可得

$$\Phi(\phi) = \{\cos m\phi, \sin m\phi\}, \quad m \in \mathbb{N}. \tag{9.13}$$

令 $\cos\theta = x$，$H(\theta) = P(x)$，考虑到 $\theta = 0, \pi$ 处的自然边界条件，则 $P(x)$ 满足连带 Legendre 方程的本征值问题，本征值和本征函数为

$$\lambda_l = l(l+1), \quad P(x) = \{\mathrm{P}_l^m(x)\}, \quad l = m, m+1, \cdots \tag{9.14}$$

故

$$H(\theta) = \{\mathrm{P}_l^m(\cos\theta)\}, \quad l = m, m+1, \cdots \tag{9.15}$$

将本征值 λ_l 代回关于 $R(r)$ 的径向方程，可以解出

$$R(r) = \{r^l, r^{-(l+1)}\}. \tag{9.16}$$

根据 $\mathrm{P}_2(x) = \dfrac{1}{2}(3x^2-1)$，有

$$\mathrm{P}_2^0(\cos\theta) = \mathrm{P}_2(\cos\theta) = \frac{1}{2}(3\cos^2\theta - 1) = \frac{1}{2}[3(1-\sin^2\theta)-1] = 1 - \frac{3}{2}\sin^2\theta, \tag{9.17}$$

则

$$\sin^2\theta = \frac{2}{3} - \frac{2}{3}\mathrm{P}_2^0(\cos\theta) = \frac{2}{3}\mathrm{P}_0^0(\cos\theta) - \frac{2}{3}\mathrm{P}_2^0(\cos\theta). \tag{9.18}$$

由 $\mathrm{P}_2''(x) = (3x)' = 3$，可得

$$\mathrm{P}_2^2(x) = (1-x^2)\mathrm{P}_2''(x) = 3(1-x^2), \quad \mathrm{P}_2^2(\cos\theta) = 3(1-\cos^2\theta) = 3\sin^2\theta. \tag{9.19}$$

于是，$r=a$ 处的边界条件可以表达成

$$\begin{aligned} u|_{r=a} &= \sin^2\theta\cos^2\phi = \frac{1}{2}\sin^2\theta(1+\cos 2\phi) = \frac{1}{2}\sin^2\theta + \frac{1}{2}\sin^2\theta\cos 2\phi \\ &= \frac{1}{3}\mathrm{P}_0^0(\cos\theta) - \frac{1}{3}\mathrm{P}_2^0(\cos\theta) + \frac{1}{6}\mathrm{P}_2^2(\cos\theta)\cos 2\phi. \end{aligned} \tag{9.20}$$

对于球内 $(r<a)$ 的情况，$r=0$ 处电势应该有限，必须舍弃 $R(r) = r^{-(l+1)}$ 的解，一般解可写作

$$u_1(r,\theta,\phi) = \sum_{m=0}^{\infty}\sum_{l=m}^{\infty}\left(\frac{r}{a}\right)^l (A_{lm}\cos m\phi + B_{lm}\sin m\phi)\,\mathrm{P}_l^m(\cos\theta). \tag{9.21}$$

代入 $r=a$ 处的边界条件 (9.20)，得

$$\begin{aligned} u_1(a,\theta,\phi) &= \sum_{m=0}^{\infty}\sum_{l=m}^{\infty}(A_{lm}\cos m\phi + B_{lm}\sin m\phi)\,\mathrm{P}_l^m(\cos\theta) \\ &= \frac{1}{3}\mathrm{P}_0^0(\cos\theta) - \frac{1}{3}\mathrm{P}_2^0(\cos\theta) + \frac{1}{6}\mathrm{P}_2^2(\cos\theta)\cos 2\phi. \end{aligned} \tag{9.22}$$

可见，有

$$A_{00} = \frac{1}{3}, \quad A_{20} = -\frac{1}{3}, \quad A_{22} = \frac{1}{6}, \tag{9.23}$$

而其它系数均为零。于是得到球内的解为

$$u_1(r,\theta,\phi) = \frac{1}{3} - \frac{1}{3}\left(\frac{r}{a}\right)^2\mathrm{P}_2(\cos\theta) + \frac{1}{6}\left(\frac{r}{a}\right)^2\mathrm{P}_2^2(\cos\theta)\cos 2\phi. \tag{9.24}$$

对于球外 $(r>a)$ 的情况，由于无穷远 $(r=\infty)$ 处的电势已取为零，必须舍弃 $R(r) = r^l$ 的解，一般解可写作

$$u_2(r,\theta,\phi) = \sum_{m=0}^{\infty}\sum_{l=m}^{\infty}\left(\frac{a}{r}\right)^{l+1}(C_{lm}\cos m\phi + D_{lm}\sin m\phi)\,\mathrm{P}_l^m(\cos\theta). \tag{9.25}$$

代入 $r=a$ 处的边界条件 (9.20)，得

$$\begin{aligned} u_2(a,\theta,\phi) &= \sum_{m=0}^{\infty}\sum_{l=m}^{\infty}\left(C_{lm}\cos m\phi + D_{lm}\sin m\phi\right)\mathrm{P}_l^m(\cos\theta) \\ &= \frac{1}{3}\,\mathrm{P}_0^0(\cos\theta) - \frac{1}{3}\,\mathrm{P}_2^0(\cos\theta) + \frac{1}{6}\,\mathrm{P}_2^2(\cos\theta)\cos 2\phi. \end{aligned} \tag{9.26}$$

可见，有

$$C_{00}=\frac{1}{3},\quad C_{20}=-\frac{1}{3},\quad C_{22}=\frac{1}{6}, \tag{9.27}$$

而其它系数均为零。于是得到球外的解为

$$u_2(r,\theta,\phi)=\frac{1}{3}\frac{a}{r}-\frac{1}{3}\left(\frac{a}{r}\right)^3\mathrm{P}_2(\cos\theta)+\frac{1}{6}\left(\frac{a}{r}\right)^3\mathrm{P}_2^2(\cos\theta)\cos 2\phi. \tag{9.28}$$

3. 考虑三维半无界空间的定解问题

$$\nabla^2 u(\mathbf{r})=0,\quad -\infty<x,y<+\infty,\quad 0<z<+\infty, \tag{9.29}$$

$$u(\mathbf{r})\big|_{z=0}=\varphi(x,y). \tag{9.30}$$

(1) 写出相应的 Green 函数的定解问题。

(2) 求出这个 Green 函数。

(3) 求出 $u(\mathbf{r})$ 的积分公式，即用 Green 函数和定解条件表示出 $u(\mathbf{r})$。

答：(1) 相应的 Green 函数 $G(\mathbf{r},\mathbf{r}_0)$ 的定解问题为

$$\nabla^2 G(\mathbf{r},\mathbf{r}_0)=-\delta(\mathbf{r}-\mathbf{r}_0),\quad -\infty<x,x_0,y,y_0<+\infty,\quad 0<z,z_0<+\infty, \tag{9.31}$$

$$G(\mathbf{r},\mathbf{r}_0)\big|_{z=0}=0. \tag{9.32}$$

(2) 用镜像法求解，将 $G(\mathbf{r},\mathbf{r}_0)$ 的定解问题看作静电场问题，表述为：$z>0$ 空间中某点 $\mathbf{r}_0=(x_0,y_0,z_0)$ 处有一个点电荷，电量为 ϵ_0，而 $z=0$ 平面上的电势为零，求解 $z>0$ 空间的电势分布。为了保持 $z=0$ 平面上的电势为零，应该在 $z<0$ 空间中的点 $\mathbf{r}_0'=(x_0,y_0,-z_0)$ 处放置一个点电荷，电量为 $-\epsilon_0$。它们在 $z>0$ 空间中产生的电势就是所求的 Green 函数：

$$\begin{aligned} G(\mathbf{r},\mathbf{r}_0) &= \frac{1}{4\pi|\mathbf{r}-\mathbf{r}_0|}-\frac{1}{4\pi|\mathbf{r}-\mathbf{r}_0'|} \\ &= \frac{1}{4\pi}\left[\frac{1}{\sqrt{(x-x_0)^2+(y-y_0)^2+(z-z_0)^2}}-\frac{1}{\sqrt{(x-x_0)^2+(y-y_0)^2+(z+z_0)^2}}\right]. \end{aligned} \tag{9.33}$$

(3) $z>0$ 空间的边界面 S（即 $z=0$ 平面）的外法线方向是 $-z$ 方向，故

$$\begin{aligned}&\left.\frac{\partial G(\mathbf{r},\mathbf{r}_0)}{\partial n}\right|_S=-\left.\frac{\partial G(\mathbf{r},\mathbf{r}_0)}{\partial z}\right|_{z=0}\\
&=-\frac{1}{4\pi}\left.\left[-\frac{1}{2}\frac{2(z-z_0)}{\left[(x-x_0)^2+(y-y_0)^2+(z-z_0)^2\right]^{3/2}}+\frac{1}{2}\frac{2(z+z_0)}{\left[(x-x_0)^2+(y-y_0)^2+(z+z_0)^2\right]^{3/2}}\right]\right|_{z=0}\\
&=-\frac{z_0}{2\pi\left[(x-x_0)^2+(y-y_0)^2+z_0^2\right]^{3/2}}.\end{aligned}\tag{9.34}$$

于是，$u(\mathbf{r})$ 的积分公式为

$$u(\mathbf{r}_0)=-\int_S\varphi(x,y)\,\frac{\partial G(\mathbf{r},\mathbf{r}_0)}{\partial n}\,d\sigma=\frac{z_0}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty}dx\int_{-\infty}^{+\infty}dy\,\frac{\varphi(x,y)}{\left[(x-x_0)^2+(y-y_0)^2+z_0^2\right]^{3/2}},\tag{9.35}$$

也可以写成

$$u(\mathbf{r})=\frac{z}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty}dx_0\int_{-\infty}^{+\infty}dy_0\,\frac{\varphi(x_0,y_0)}{\left[(x_0-x)^2+(y_0-y)^2+z^2\right]^{3/2}}.\tag{9.36}$$

4. 考虑平面第一象限的定解问题

$$\nabla^2u(\boldsymbol{\rho})=0,\quad 0<x,y<+\infty,\tag{9.37}$$

$$u(\boldsymbol{\rho})|_{x=0}=\varphi_1(y),\quad u(\boldsymbol{\rho})|_{y=0}=\varphi_2(x).\tag{9.38}$$

(1) 写出相应的 Green 函数的定解问题。

(2) 求出这个 Green 函数。

答：(1) 相应的 Green 函数 $G(\boldsymbol{\rho},\boldsymbol{\rho}_0)$ 的定解问题为

$$\nabla^2G(\boldsymbol{\rho},\boldsymbol{\rho}_0)=-\delta(\boldsymbol{\rho}-\boldsymbol{\rho}_0),\quad 0<x,x_0,y,y_0<+\infty,\tag{9.39}$$

$$G(\boldsymbol{\rho},\boldsymbol{\rho}_0)|_{x=0}=0,\quad G(\boldsymbol{\rho},\boldsymbol{\rho}_0)|_{y=0}=0.\tag{9.40}$$

(2) 用镜像法求解，将 $G(\boldsymbol{\rho},\boldsymbol{\rho}_0)$ 的定解问题看作静电场问题，表述为：在平面第一象限中某点 $\boldsymbol{\rho}_0=(x_0,y_0)$ 处有一个点电荷，电量为 ϵ_0，而第一象限边界上电势为零，求解第一象限中的电势分布。为了保持第一象限边界上的电势为零，应该在 $\boldsymbol{\rho}_1=(x_0,-y_0)$ 处放置一个电量为 $-\epsilon_0$ 的点电荷，在 $\boldsymbol{\rho}_2=(-x_0,y_0)$ 处放置一个电量为 $-\epsilon_0$ 的点电荷，在 $\boldsymbol{\rho}_3=(-x_0,-y_0)$ 处放置一个电量为 ϵ_0 的点电荷。这四个点电荷在第一象限中产生的电势就是所求的 Green 函数：

$$\begin{aligned}G(\boldsymbol{\rho},\boldsymbol{\rho}_0)&=-\frac{1}{2\pi}\ln|\boldsymbol{\rho}-\boldsymbol{\rho}_0|+\frac{1}{2\pi}\ln|\boldsymbol{\rho}-\boldsymbol{\rho}_1|+\frac{1}{2\pi}\ln|\boldsymbol{\rho}-\boldsymbol{\rho}_2|-\frac{1}{2\pi}\ln|\boldsymbol{\rho}-\boldsymbol{\rho}_3|\\
&=\frac{1}{4\pi}\ln\frac{|\boldsymbol{\rho}-\boldsymbol{\rho}_1|^2|\boldsymbol{\rho}-\boldsymbol{\rho}_2|^2}{|\boldsymbol{\rho}-\boldsymbol{\rho}_0|^2|\boldsymbol{\rho}-\boldsymbol{\rho}_3|^2}\\
&=\frac{1}{4\pi}\ln\frac{\left[(x-x_0)^2+(y+y_0)^2\right]\left[(x+x_0)^2+(y-y_0)^2\right]}{\left[(x-x_0)^2+(y-y_0)^2\right]\left[(x+x_0)^2+(y+y_0)^2\right]}\end{aligned}\tag{9.41}$$

10 第十次作业 (不用交)

1. 高为 h 的均匀导热圆柱体，半径为 a，侧面绝热，下底和上底的温度分布分别为已知函数 $f_1(\rho)$ 和 $f_2(\rho)$。

(1) 求柱内的稳定温度分布。

(2) 计算特殊情况 $f_1(\rho)=0$，$f_2(\rho)=u_0$ 的结果，其中 u_0 是常数。

答：(1) 采用柱坐标系，柱内的稳定温度分布 $u(\rho,\phi,z)$ 满足定解问题

$$\nabla^2 u = 0 \quad (0<\rho<a,\ 0<z<h), \tag{10.1}$$
$$\left.\frac{\partial u}{\partial \rho}\right|_{\rho=a} = 0, \tag{10.2}$$
$$u|_{z=0} = f_1(\rho), \quad u|_{z=h} = f_2(\rho). \tag{10.3}$$

此定解问题与 ϕ 无关，因而解也与 ϕ 无关。分离变量，令 $u(\rho,z)=R(\rho)Z(z)$，则方程 (10.1) 化为

$$0=\nabla^2 u=\frac{1}{\rho}\frac{\partial}{\partial\rho}\left(\rho\frac{\partial u}{\partial\rho}\right)+\frac{1}{\rho^2}\frac{\partial^2 u}{\partial\phi^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial z^2}=R''Z+\frac{1}{\rho}R'Z+RZ'', \tag{10.4}$$

整理得

$$\frac{R''}{R}+\frac{R'}{\rho R}=-\frac{Z''}{Z}. \tag{10.5}$$

结合自然边界条件和边界条件 (10.2)，得到

$$Z''-\lambda Z=0, \tag{10.6}$$

以及 0 阶 Bessel 方程的本征值问题

$$R''+\frac{1}{\rho}R'+\lambda R=0, \quad 0<\rho<a, \tag{10.7}$$
$$|R(0)|<\infty, \quad R'(a)=0. \tag{10.8}$$

其中 λ 是分离变量时引入的常数。

此本征值问题的本征值为

$$\lambda_0=0, \quad \lambda_n=k_n^2, \quad n=1,2,\cdots \tag{10.9}$$

其中

$$k_n=\frac{\tilde{x}_{0n}}{a}, \tag{10.10}$$

而 $\tilde{x}_{0n}$ 是 $\mathrm{J}_0'(x)$ 的正零点；相应的本征函数为

$$R_0(\rho)=1, \quad R_n(\rho)=\mathrm{J}_0(k_n\rho), \quad n=1,2,\cdots \tag{10.11}$$

将 λ 的本征值 λ_0 和 λ_n 分别代入方程 (10.6)，解得

$$Z_0(z) = \{1, z\}, \quad Z_n = \{e^{k_n z}, e^{-k_n z}\}. \tag{10.12}$$

于是，一般解可以取为

$$u(\rho, z) = A_0 + B_0 z + \sum_{n=1}^{\infty} (A_n e^{k_n z} + B_n e^{-k_n z}) \, \mathrm{J}_0(k_n\rho). \tag{10.13}$$

由边界条件 (10.3) 有

$$f_1(\rho) \;=\; u(\rho, 0) = A_0 + \sum_{n=1}^{\infty} (A_n + B_n) \, \mathrm{J}_0(k_n\rho), \tag{10.14}$$

$$f_2(\rho) \;=\; u(\rho, h) = A_0 + B_0 h + \sum_{n=1}^{\infty} (A_n e^{k_n h} + B_n e^{-k_n h}) \, \mathrm{J}_0(k_n\rho). \tag{10.15}$$

根据广义 Fourier 展开式的系数公式和

$$||\mathrm{J}_0(k_n\rho)||^2 = \frac{a^2}{2} \, \mathrm{J}_0^2(\tilde{x}_{0n}), \tag{10.16}$$

可得

$$A_0 = \frac{2}{a^2} \int_0^a f_1(\rho) \rho \, d\rho, \tag{10.17}$$

以及

$$A_n + B_n \;=\; \frac{2}{a^2 \mathrm{J}_0^2(\tilde{x}_{0n})} \int_0^a f_1(\rho) \, \mathrm{J}_0(k_n\rho) \rho \, d\rho, \tag{10.18}$$

$$A_0 + B_0 h \;=\; \frac{2}{a^2} \int_0^a f_2(\rho) \rho \, d\rho, \tag{10.19}$$

$$A_n e^{k_n H} + B_n e^{-k_n H} \;=\; \frac{2}{a^2 \mathrm{J}_0^2(\tilde{x}_{0n})} \int_0^a f_2(\rho) \, \mathrm{J}_0(k_n\rho) \rho \, d\rho. \tag{10.20}$$

从而求得

$$B_0 \;=\; \frac{2}{a^2 h} \int_0^a [f_2(\rho) - f_1(\rho)] \rho \, d\rho, \tag{10.21}$$

$$A_n \;=\; \frac{1}{a^2 \mathrm{J}_0^2(\tilde{x}_{0n}) \sinh(k_n h)} \int_0^a [f_2(\rho) - e^{-k_n H} f_1(\rho)] \, \mathrm{J}_0(k_n\rho) \rho \, d\rho, \tag{10.22}$$

$$B_n \;=\; \frac{1}{a^2 \mathrm{J}_0^2(\tilde{x}_{0n}) \sinh(k_n h)} \int_0^a [e^{k_n H} f_1(\rho) - f_2(\rho)] \, \mathrm{J}_0(k_n\rho) \rho \, d\rho. \tag{10.23}$$

将这些系数代入一般解 (10.13)，就得到所求的温度分布。

(2) 对于 $f_1(\rho) = 0$，$f_2(\rho) = u_0$，有

$$A_0 = 0, \quad B_0 = \frac{2u_0}{a^2 h} \int_0^a \rho \, d\rho = \frac{u_0}{h}, \tag{10.24}$$

以及

$$
\begin{aligned}
A_n &= \frac{u_0}{a^2 \mathrm{J}_0^2(\tilde{x}_{0n})\sinh(k_n h)} \int_0^a \mathrm{J}_0(k_n\rho)\rho\, d\rho, && (10.25)\\
B_n &= -\frac{u_0}{a^2 \mathrm{J}_0^2(\tilde{x}_{0n})\sinh(k_n h)} \int_0^a \mathrm{J}_0(k_n\rho)\rho\, d\rho = -A_n. && (10.26)
\end{aligned}
$$

利用递推关系

$$\frac{d}{dx}[x\,\mathrm{J}_1(x)] = x\,\mathrm{J}_0(x), \tag{10.27}$$

推出

$$\int_0^a \mathrm{J}_0(k_n\rho)\rho\, d\rho = \frac{1}{k_n^2}\int_0^{k_n a} x\,\mathrm{J}_0(x)\, dx = \left.\frac{x\,\mathrm{J}_1(x)}{k_n^2}\right|_0^{k_n a} = \frac{a\,\mathrm{J}_1(k_n a)}{k_n} = \frac{a\,\mathrm{J}_1(\tilde{x}_{0n})}{k_n}. \tag{10.28}$$

由于 $\tilde{x}_{0n}$ 是 $\mathrm{J}_0'(x)$ 的零点，根据递推关系 $\mathrm{J}_0'(x) = -\mathrm{J}_1(x)$ 可得

$$\mathrm{J}_1(\tilde{x}_{0n}) = -\,\mathrm{J}_0'(\tilde{x}_{0n}) = 0, \tag{10.29}$$

故有

$$A_n = B_n = 0, \quad n = 1, 2, \cdots \tag{10.30}$$

于是，定解问题的解为

$$u(\rho, z) = \frac{u_0 z}{h}. \tag{10.31}$$

2. 均匀导热圆柱体，半径为 a，高为 h。取柱坐标系，z 轴为圆柱的对称轴，方向由下底指向上底，原点在下底中心。上下底的温度保持零度，侧面温度分布为 $f(\phi, h)$。

(1) 求柱内的稳定温度分布。

(2) 计算特例 $f(\phi, h) = u_0 \cos\phi \sin\dfrac{\pi z}{h}$，其中 u_0 为常数。

答：(1) 柱内的稳定温度分布 $u(\rho, \phi, z)$ 满足定解问题

$$
\begin{aligned}
&\nabla^2 u = 0 \quad (0 < \rho < a,\ 0 < z < h), && (10.32)\\
&u|_{z=0} = 0, \quad u|_{z=h} = 0, && (10.33)\\
&u|_{\rho=a} = f(\phi, h). && (10.34)
\end{aligned}
$$

分离变量，令 $u(\rho, \phi, z) = R(\rho)\Phi(\phi)Z(z)$，则方程 (10.32) 化为

$$0 = \nabla^2 u = \frac{1}{\rho}\frac{\partial}{\partial\rho}\left(\rho\frac{\partial u}{\partial\rho}\right) + \frac{1}{\rho^2}\frac{\partial^2 u}{\partial\phi^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} = R''\Phi Z + \frac{1}{\rho}R'\Phi Z + \frac{1}{\rho^2}R\Phi'' Z + R\Phi Z''. \tag{10.35}$$

结合自然边界条件和边界条件 (10.33)，整理得到本征值问题

$$
\begin{aligned}
&\Phi'' + \mu\Phi = 0, && (10.36)\\
&\Phi(\phi + 2\pi) = \Phi(\phi), && (10.37)
\end{aligned}
$$

和本征值问题

$$Z'' + \lambda Z = 0, \tag{10.38}$$

$$Z(0) = 0, \quad Z(h) = 0, \tag{10.39}$$

以及常微分方程

$$R'' + \frac{1}{\rho}R' - \left(\lambda + \frac{\mu}{\rho^2}\right) R = 0. \tag{10.40}$$

其中，μ 和 λ 都是分离变量时引入的常数。

求解关于 $\Phi(\phi)$ 的本征值问题，得到本征值和本征函数

$$\mu_m = m^2, \quad \Phi_m(\phi) = \{\cos m\phi,\ \sin m\phi\}, \quad m \in \mathbb{N}. \tag{10.41}$$

求解关于 $Z(z)$ 的本征值问题，得到本征值和本征函数

$$\lambda_n = \left(\frac{n\pi}{h}\right)^2, \quad Z_n(z) = \sin\frac{n\pi z}{h}, \quad n \in \mathbb{N}^+. \tag{10.42}$$

将本征值 μ_m 和 λ_n 代入方程 (10.40)，得

$$R'' + \frac{1}{\rho}R' - \left[\left(\frac{n\pi}{h}\right)^2 + \frac{m^2}{\rho^2}\right] R = 0. \tag{10.43}$$

此方程具有自然边界条件

$$|R(0)| < \infty. \tag{10.44}$$

令

$$x \equiv \frac{n\pi\rho}{h}, \quad y(x) \equiv R(\rho), \tag{10.45}$$

将上述方程化为

$$\left(\frac{n\pi}{h}\right)^2 \left[y'' + \frac{1}{x}y' - \left(1 + \frac{m^2}{\rho^2}\right) y\right] = 0, \tag{10.46}$$

故有

$$y'' + \frac{1}{x}y' - \left(1 + \frac{m^2}{x^2}\right) y = 0. \tag{10.47}$$

这是 m 阶虚宗量 Bessel 方程的标准形式，解为

$$y_m(x) = \{\mathrm{I}_m(x),\ \mathrm{K}_m(x)\}. \tag{10.48}$$

考虑到自然边界条件 $|y(0) < \infty|$，应舍弃 $\mathrm{K}_m(x)$。故方程 (10.43) 的解为

$$R_{mn}(\rho) = y_m(x) = \left\{\mathrm{I}_m\left(\frac{n\pi\rho}{h}\right)\right\}. \tag{10.49}$$

于是，一般解可以取为

$$u(\rho,\phi,z)=\sum_{n=1}^{\infty}A_{0n}\frac{\mathrm{I}_m(n\pi\rho/h)}{\mathrm{I}_m(n\pi a/h)}\sin\frac{n\pi z}{h}+\sum_{m=1}^{\infty}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\mathrm{I}_m(n\pi\rho/h)}{\mathrm{I}_m(n\pi a/h)}(A_{mn}\cos m\phi+B_{mn}\sin m\phi)\sin\frac{n\pi z}{h}. \tag{10.50}$$

由边界条件 (10.34) 有

$$\sum_{n=1}^{\infty}A_{0n}\sin\frac{n\pi z}{h}+\sum_{m=1}^{\infty}\sum_{n=1}^{\infty}(A_{mn}\cos m\phi+B_{mn}\sin m\phi)\sin\frac{n\pi z}{h}=f(\phi,h). \tag{10.51}$$

根据广义 Fourier 展开式的系数公式，可得

$$A_{0n}=\frac{1}{\pi h}\int_0^{2\pi}d\phi\int_0^h dz\, f(\phi,h)\sin\frac{n\pi z}{h},\quad n\in\mathbb{N}^+ \tag{10.52}$$

$$A_{mn}=\frac{2}{\pi h}\int_0^{2\pi}d\phi\int_0^h dz\, f(\phi,h)\cos m\phi\sin\frac{n\pi z}{h},\quad m,n\in\mathbb{N}^+, \tag{10.53}$$

$$B_{mn}=\frac{2}{\pi h}\int_0^{2\pi}d\phi\int_0^h dz\, f(\phi,h)\sin m\phi\sin\frac{n\pi z}{h},\quad m,n\in\mathbb{N}^+. \tag{10.54}$$

将这些系数代入一般解 (10.50)，就得到所求的温度分布。

(2) 对于 $f(\phi,h)=u_0\cos\phi\sin\dfrac{\pi z}{h}$，有

$$\sum_{n=1}^{\infty}A_{0n}\sin\frac{n\pi z}{h}+\sum_{m=0}^{\infty}\sum_{n=0}^{\infty}(A_{mn}\cos m\phi+B_{mn}\sin m\phi)\sin\frac{n\pi z}{h}=u_0\cos\phi\sin\frac{\pi z}{h}, \tag{10.55}$$

从而得到

$$A_{11}=u_0, \tag{10.56}$$

其它系数为零。因此，定解问题的解为

$$u(\rho,\phi,z)=u_0\frac{\mathrm{I}_1(n\pi\rho/h)}{\mathrm{I}_1(n\pi a/h)}\cos\phi\sin\frac{\pi z}{h}. \tag{10.57}$$