

中山大学本科生期末考试

考试科目：《概率与数理统计》（A卷）

学年学期：2019 学年第 2 学期 姓名：_____

学院/系：物理学院 学号：_____

考试方式：开卷 年级专业：_____

考试时长：120 分钟 班别：_____

任课老师：何春山、凌家杰

警示

《中山大学授予学士学位工作细则》第八条：“考试作弊者，不授予学士学位。”

-----以下为试题区域，共四道大题，总分 100 分，考生请在答题纸上作答-----

一、选择题（每题只有唯一答案；共 6 小题，每小题 3 分，共 18 分）

1. 当事件 A 和 B 同时发生时，事件 C 必发生，则_____。

- A. $P(C) \leq P(A) + P(B) - 1$ B. $P(C) \geq P(A) + P(B) - 1$
 C. $P(C) = P(AB)$ D. $P(C) = P(A \cup B)$

2. 某地 1987 年全国高校统考物理成绩 X 服从正态分布 $N(42, 36)$ ，若考生得 48 分，则大约有_____% 的考生名列该考生之后。

- A. 84 B. 56
 C. 72 D. 66

3. 已知离散型随机变量 X 的可能取值为 $-2, 0, 2, \sqrt{5}$ ，相应的概率依次为 $\frac{1}{a}, \frac{3}{2a}, \frac{5}{4a}, \frac{7}{8a}$ ，则

$P(|X| \leq 2 | X \geq 0)$ 为_____。

- A. $\frac{21}{29}$ B. $\frac{22}{29}$ C. $\frac{2}{3}$ D. $\frac{1}{3}$

4. 设随机变量 $X_1, X_2, X_3, \dots, X_9$ 相互独立同分布， $E(X_i) = 1, D(X_i) = 1, i = 1, \dots, 9$ 。令

$S_9 = \sum_{i=1}^9 X_i$, 则对任意 $\varepsilon > 0$, 从切比雪夫不等式直接可得_____。

- A. $P\{|S_9 - 1| \leq \varepsilon\} \geq 1 - \frac{1}{\varepsilon^2}$ B. $P\{|S_9 - 9| \leq \varepsilon\} \geq 1 - \frac{9}{\varepsilon^2}$
 C. $P\{|S_9 - 9| \leq \varepsilon\} \geq 1 - \frac{1}{\varepsilon^2}$ D. $P\{|\frac{1}{9}S_9 - 1| \leq \varepsilon\} \geq 1 - \frac{1}{\varepsilon^2}$

5. 设 $X \sim N(\mu, \sigma^2)$, $X_1, X_2, X_3, \dots, X_n$ 为其样本, \bar{X} 是样本均值, 记

$$S_1^2 = \frac{1}{n-1} \sum_{i=1}^n (X_i - \bar{X})^2, \quad S_2^2 = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n (X_i - \bar{X})^2$$

$$S_3^2 = \frac{1}{n-1} \sum_{i=1}^n (X_i - \mu)^2, \quad S_4^2 = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n (X_i - \mu)^2$$

则服从自由度为 $n-1$ 的 t 分布的随机变量是_____。

- A. $t = \frac{\bar{X} - \mu}{S_1 / \sqrt{n-1}}$ B. $t = \frac{\bar{X} - \mu}{S_2 / \sqrt{n-1}}$
 C. $t = \frac{\bar{X} - \mu}{S_3 / \sqrt{n}}$ D. $t = \frac{\bar{X} - \mu}{S_4 / \sqrt{n}}$

6. 设 $X \sim N(\mu, \sigma^2)$, σ^2 为已知, 若样本容量 n 和置信度 $1-\alpha$ 均不变, 则对于不同的样本观测值, μ 的置信区间长度_____。

- A. 变长; B. 变短; C. 保持不变; D. 不能确定.

二、填空题 (共 8 小题, 每小题 4 分, 共 32 分)

1. 一批电子元件共有 100 个, 次品率为 0.05. 连续两次不放回地从中任取一个, 则第二次才取到正品的概率为_____。(用分数表示)

2. 设连续随机变量 X 的密度函数为 $f(x)$, 则随机变量 $Y = 3e^X$ 的概率密度函数 $f_Y(y) =$ _____.

3. 设 \bar{X} 为总体 $X \sim N(3, 4)$ 中抽取的样本 (X_1, X_2, X_3, X_4) 的均值, 则 $P(-1 < \bar{X} < 5) =$ _____.

4. 设二维随机变量 (X, Y) 的联合概率密度函数为

$$f(x, y) = \begin{cases} 1, & |y| < x, 0 < x < 1; \\ 0, & \text{其他} \end{cases}$$

则条件概率密度函数为：当_____时， $f_{Y|X}(y|x) =$ _____.

5. 设 $X \sim t(n)$, ($n > 1$), 则随机变量 $Y = \frac{1}{X^2}$ 服从的分布为_____。(需写出自由度)

6. 设随机变量 X 的分布函数为 $F(x) = 0.3\Phi(x) + 0.7\Phi(\frac{x-1}{2})$, 其中 $\Phi(x)$ 为标准正态分布函数, 则 $E(X) =$ _____.

7. 设随机变量 X 在区间 $[-1, 2]$ 上服从均匀分布; 随机变量

$$Y = \begin{cases} 1, & X > 0, \\ 0, & X = 0, \\ -1, & X < 0, \end{cases}$$

则方差 $D(Y) =$ _____。(用分数表示)

8. 设 $X \sim N(\mu, 1)$, 容量 $n = 16$, 均值 $\bar{X} = 5.2$, 则未知参数 μ 的置信度 0.95 的置信区间为_____.

三、分析计算题 (共 5 小题, 每小题 10 分, 共 50 分)

1. 一个工厂有甲、乙、丙三个车间生产同一种产品, 这三个车间的产量分别占总产量的 25%, 35%, 40%。如果甲、乙、丙每个车间成品中的次品分别占其产量的 5%, 4%, 2%, 问从全厂生产出的产品中抽出一个是次品的条件下, 它恰好是甲车间生产出来的概率是多少?

2. 设随机变量 $X \sim U(0, \pi)$, 求 $Y = \sin X$ 的概率密度函数。

3. 设随机变量 X, Y 的联合概率密度函数为:

$$f(x, y) = \begin{cases} C(x+y), & 0 \leq y \leq x \leq 1 \\ 0, & \text{其他} \end{cases}$$

(1) 求 C ; (2) 求 X, Y 的边缘分布;

(3) 讨论 X 与 Y 的独立性; (4) 计算 $P(X+Y \leq 1)$ 。

4. 设 X_1, X_2, \dots, X_n 为总体 X 的一个样本, 记 N 为样本值 x_1, x_2, \dots, x_n 中小于 1 的个数。总体 X 的密度函数为:

$$f(x; \theta) = \begin{cases} \theta, & 0 < x < 1 \\ 1 - \theta, & 1 \leq x < 2 \\ 0, & \text{其他} \end{cases}$$

$0 < \theta < 1$, 求参数 θ 的矩估计量和极大似然估计量。

5. 用老的铸造法铸造的零件的强度平均值是 0.528 N/mm^2 , 标准差是 0.016 N/mm^2 。为了降低成本, 改变了铸造方法, 现抽取了 9 个样品, 测其强度 (N/mm^2) 为

0.519, 0.530, 0.527, 0.541, 0.532, 0.523, 0.525, 0.511, 0.541

假设强度服从正态分布, 试判断是否没有改变强度的均值和标准差。(检验水平为 $\alpha = 0.05$)

=====

附表: 标准正态分布数值表

$\Phi(1.0) = 0.8413$
$\Phi(1.96) = 0.975$
$\Phi(2.0) = 0.9772$
$\Phi(2.5) = 0.9938$

χ^2 分布数值表

$\chi_{0.025}^2(8) = 17.534$
$\chi_{0.975}^2(8) = 2.180$
$\chi_{0.05}^2(8) = 15.507$
$\chi_{0.95}^2(8) = 2.733$

t 分布数值表

$t_{0.025}(8) = 2.306$
$t_{0.05}(8) = 1.8595$
$t_{0.025}(9) = 2.2622$
$t_{0.05}(9) = 1.8331$