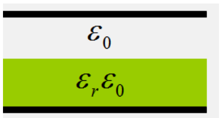
# 中山大学物理学院 2017 学年 春季 学期期中
## 《电磁学》 试卷

提前交卷每分钟加 0.3 分。

如果全班卷面最高分 M>100，则卷面分 N>60 的需按下式变换以得到实际成绩 S：S=60+40*(N-60)/(M-60)；卷面分 N<=60 的，实际成绩 S=N。

一些可能要用到的常数：电子电荷 $-1.602\times10^{-19}C$，真空介电常数 $8.85\times10^{-12}C^2/Nm^2$，圆周率 3.1415926

**1.** 有一平行板电容器面积为 S，板间距离为 d，d 很小，其中有一块 d/2 厚的介质相对介电常数为 $\varepsilon_r$，两极板间电压为 U，求电场大小（10 分）、静电能。（6 分）




解：

$$E_1\frac{d}{2}+E_2\frac{d}{2}=U \quad (2\text{ 分})$$

$$\frac{D}{\varepsilon_0}\frac{d}{2}+\frac{D}{\varepsilon_0\varepsilon_r}\frac{d}{2}=U \quad (2\text{ 分})$$

$$D=\frac{2U\varepsilon_0}{d}\left(\frac{\varepsilon_r}{1+\varepsilon_r}\right) \quad (2\text{ 分})$$

$$E_1=\frac{2U}{d}\left(\frac{\varepsilon_r}{1+\varepsilon_r}\right)$$

（4 分）

$$E_2=\frac{2U}{d}\left(\frac{1}{1+\varepsilon_r}\right)$$

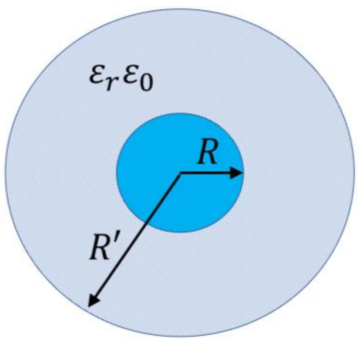
静电能解法（一）：

$$W=\frac{1}{2}QU\ (2\text{ 分})=\frac{1}{2}DSU\ (2\text{ 分})=\frac{U^2S\varepsilon_0}{d}\left(\frac{\varepsilon_r}{1+\varepsilon_r}\right)(2\text{ 分})$$

解法（二）：

$$W=\left(\frac{1}{2}\varepsilon_0E_1^2+\frac{1}{2}\varepsilon_r\varepsilon_0E_2^2\right)\frac{Sd}{2}\ (3\text{ 分})\ =\frac{U^2S\varepsilon_0}{d}\left(\frac{\varepsilon_r}{1+\varepsilon_r}\right)\ (3\text{ 分})$$

**2.** 在半径为 R 的金属球之外有一层半径为 $R'$ 的均匀介质层。设电介质相对介电常数为 $\varepsilon$，金属球带电荷量为 $Q$，求：（1）介质内的电场分布（8 分）；（2）介质外表面的极化电荷面密度（7 分）。



(1) $4\pi r^2 D = Q$（3 分）$\Rightarrow \vec{D} = \frac{Q}{4\pi r^2}\hat{r}$（3 分）$\Rightarrow \vec{E} = \frac{Q}{4\pi\varepsilon_r\varepsilon_0 r^2}\hat{r}$（2 分）

(2) $\sigma_p = \vec{P}\big|_{r=R'} \cdot \hat{r}$（3 分）$= \left(\vec{D} - \varepsilon_0\vec{E}\right)\big|_{r=R'} \cdot \hat{r}$（2 分）$= \frac{Q}{4\pi R'^2} - \frac{Q}{4\pi\varepsilon_r R'^2}$（2 分）

**3.** 一长直导线半径为 1.5 cm，外面套有内半径为 3.0 cm 的导体圆筒，两者共轴，其间介质介电常数为 2.0。当两者电势差为 5000V 时，何处电场强度最大？（2 分）其值是多少？（8 分）。

答：导线表面（或答 r=1.5 cm 处）电场强度最大。

$$U = \frac{\lambda}{2\pi\varepsilon_0}\ln\frac{R_2}{R_1} \Rightarrow \lambda = 2U\pi\varepsilon_0 / \ln\frac{R_2}{R_1}$$

$$E_{\max} = \frac{\lambda}{2\pi\varepsilon_0 R_1} = U / R_1 \ln\frac{R_2}{R_1} = \frac{5000V}{0.015m \times \ln 2.0} = 4.8\times10^5 V/m$$

会求 lamda 四分，会由 lamda 求电场四分。

**4.** 两金属球半径分别为 $R_1$、$R_2$，它们之间的距离 $d$ 远大于它们的半径，开始时球 1 带电荷 $Q$，球 2 不带电。若用一细导线将它们连起来，达到静电平衡后，两个球分别带多少电？（10 分）

$$\varphi_1 \approx \frac{Q_1}{4\pi\varepsilon_0 R_1}, \varphi_2 \approx \frac{Q_2}{4\pi\varepsilon_0 R_2} \quad （2 分）$$

$$\varphi_1 = \varphi_2 （3 分）\Rightarrow \frac{Q_1}{4\pi\varepsilon_0 R_1} = \frac{Q_2}{4\pi\varepsilon_0 R_2} \Rightarrow \frac{Q_1}{R_1} = \frac{Q_2}{R_2}$$

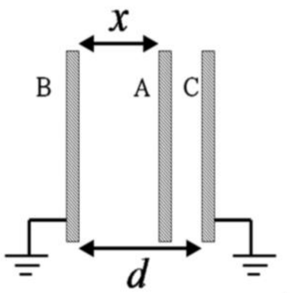
$$Q_1 + Q_2 = Q （3 分）$$

$$Q_1 = \frac{R_1 Q}{R_1 + R_2}, Q_2 = \frac{R_2 Q}{R_1 + R_2} \quad （2 分）$$

两个球上的电荷密度不相等。

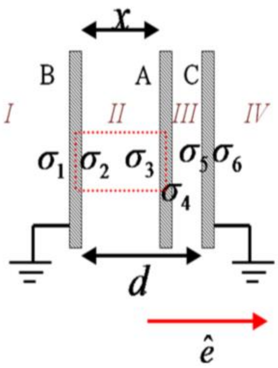
细导线上的电场为零，但不能仅由两个球上的电荷求出。

**5.** 三块平行金属板 A、B、C。以 S 代表各板面积，$x$ 及 $d$ 分别代表 A、B 之间及 B、C 之间的距离。设 $d$ 小到各板可视为无限大平板。令 B、C 板接地，A 板带电荷 Q，略去 A 板的厚度，求空间的场强分布（１０分）。




答：

设各面电荷面密度如图，如图作高斯面




则因为板内电场为零，所以$\sigma_2=-\sigma_3$，$\sigma_4=-\sigma_5$

因电荷守恒$\sigma_3+\sigma_4=Q/S$

因为 B、C 板接地$\sigma_1=0$，$\sigma_6=0$

又

$U_{AB}=U_{AC}$

$-E_{II}x=E_{III}(d-x)$

$-\frac{\sigma_2}{\varepsilon_0}x=\frac{\sigma_4}{\varepsilon_0}(d-x)$

联立以上各式，解得

$\sigma_2=-\sigma_3=\frac{x-d}{d}\frac{Q}{S}$

$\sigma_4=-\sigma_5=\frac{x}{d}\frac{Q}{S}$

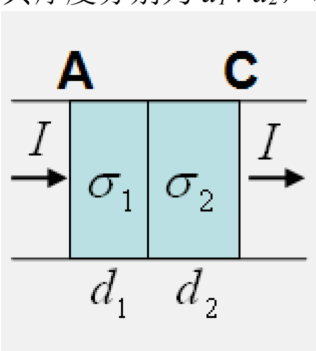
可由高斯定理求得各区域的电场

$\vec{E}_{II}=\frac{\sigma_2}{\varepsilon_0}\hat{e}=\frac{x-d}{\varepsilon_0 d}\frac{Q}{S}\hat{e}$

$\vec{E}_{III}=\frac{\sigma_4}{\varepsilon_0}\hat{e}=\frac{x}{\varepsilon_0 d}\frac{Q}{S}\hat{e}$

以上式子一行一分。I、IV 区域的电场可以不写。

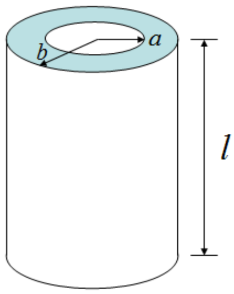
**6.** 图中两边为电导率很大的导体，中间两层是电导率分别为$\sigma_1$、$\sigma_2$的均匀导电介质，其厚度分别为$d_1$、$d_2$，导体的截面积为$S$，AC 之间的电势差为$U$，求电流$I$（12 分）。



$$U=E_1d_1+E_2d_2\text{（3 分）}=\frac{j}{\sigma_1}d_1+\frac{j}{\sigma_2}d_2\text{（3 分）}=\frac{I}{S}\left(\frac{d_1}{\sigma_1}+\frac{d_2}{\sigma_2}\right)\text{（3 分）}$$

$$I=\frac{US}{\dfrac{d_1}{\sigma_1}+\dfrac{d_2}{\sigma_2}}\text{（3 分）}$$

**7.** 一个铜圆柱体半径为 $a$，长为 $l$，外面套一个与它共轴且等长的圆筒，筒的内半径为 $b$（$b << l$），在柱与筒之间充满电导率为 $\sigma(\sigma << \sigma_{铜})$ 的均匀导电物质，求柱与筒之间的电阻（10 分）。




第 1 题图

解：$\mathrm{d}R=\dfrac{\mathrm{d}r}{\sigma S}=\dfrac{\mathrm{d}r}{\sigma 2\pi rl}$

$$R=\int_a^b\frac{\mathrm{d}r}{2\pi rl\sigma}=\frac{1}{2\pi l\sigma}\ln\frac{b}{a}$$

每写对一个等号可得 2 分。

**8.** 半径为 R 的圆盘，均匀带电，面密度为 $\sigma$，求其轴线上的电场分布（10 分），电势分布（10 分）。

答：

以轴线为 X 轴，原点在圆盘上，轴线上任一点 $p$ 到圆盘的距离为 $x$，在圆盘上取半径为 $r$ 宽为 d$r$ 的圆环，环上所带电荷为 $dq=2\pi r\sigma dr$，(2 分)

解法一：该圆环在 p 点的电势为

$$dU=\frac{2\pi r\sigma dr}{4\pi\varepsilon_0\left(r^2+x^2\right)^{1/2}}=\frac{r\sigma dr}{2\varepsilon_0\left(r^2+x^2\right)^{1/2}}\text{(3 分)}$$

整个圆盘在该点的电势为

$$U=\int_0^R dU=\int_0^R\frac{\sigma r dr}{2\varepsilon_0\left(r^2+x^2\right)^{1/2}}=\frac{\sigma}{2\varepsilon_0}\left(\sqrt{R^2+x^2}-|x|\right)\text{(5 分)}$$

由于电荷的轴对称分布，$E_y=E_z=0$ (2 分)

x>0 时 $E=E_x=-\dfrac{\partial U}{\partial x}=\dfrac{\sigma}{2\varepsilon_0}\left(1-\dfrac{x}{\sqrt{R^2+x^2}}\right)$(4 分)

x<0 时 $E=E_x=-\dfrac{\partial U}{\partial x}=\dfrac{\sigma}{2\varepsilon_0}\left(-1-\dfrac{x}{\sqrt{R^2+x^2}}\right)$(4 分)

或$\left|E_x\right| = \dfrac{\sigma}{2\varepsilon_0}\left(1 - \dfrac{|x|}{\sqrt{R^2 + x^2}}\right)$（无绝对值符号也可）再指出方向，大小 4 分，方向 4 分。

解法二：该圆环在 p 点产生的电场，由于电荷的轴对称分布， $E_y = E_z = 0$ (2 分)

$$dE_x = \frac{dq}{4\pi\varepsilon_0 r'^2}\frac{x}{r'} = \frac{\sigma xrdr}{2\varepsilon_0 r'^3} = \frac{\sigma xrdr}{2\varepsilon_0\sqrt{r^2 + x^2}^3} \text{(2 分)}$$

$$E_x = \int_0^R \frac{\sigma xrdr}{2\varepsilon_0\sqrt{r^2 + x^2}^3}\text{（2 分）} = -\frac{\sigma x}{2\varepsilon_0\sqrt{r^2 + x^2}}\Bigg|_{r=0}^{r=R} = \begin{cases} \dfrac{\sigma}{2\varepsilon_0}\left(1 - \dfrac{x}{\sqrt{R^2 + x^2}}\right) & x > 0\text{(2分)} \\ \dfrac{\sigma}{2\varepsilon_0}\left(-1 - \dfrac{x}{\sqrt{R^2 + x^2}}\right) & x < 0\text{(2分)} \end{cases}$$

或$\left|E_x\right| = \dfrac{\sigma}{2\varepsilon_0}\left(1 - \dfrac{|x|}{\sqrt{R^2 + x^2}}\right)$（无绝对值符号也可）再指出方向，大小 4 分，方向 2 分。

x>0 时(5 分)

$$U = \int_x^\infty \frac{\sigma}{2\varepsilon_0}\left(1 - \frac{x}{\sqrt{R^2 + x^2}}\right)dx = \frac{\sigma}{2\varepsilon_0}\left(x - \sqrt{R^2 + x^2}\right)\Big|_{x=x}^{x=\infty} = -\frac{\sigma}{2\varepsilon_0}\left(x - \sqrt{R^2 + x^2}\right)$$

x<0 时(5 分)

$$U = \int_x^{-\infty} -\frac{\sigma}{2\varepsilon_0}\left(1 + \frac{x}{\sqrt{R^2 + x^2}}\right)dx = -\frac{\sigma}{2\varepsilon_0}\left(x + \sqrt{R^2 + x^2}\right)\Big|_{x=x}^{x=-\infty} = \frac{\sigma}{2\varepsilon_0}\left(x + \sqrt{R^2 + x^2}\right)$$

写成$U = \dfrac{\sigma}{2\varepsilon_0}\left(\sqrt{R^2 + x^2} - |x|\right)$也可以，不带绝对值符号也可以。

凡矢量无方向扣两分，有效数字错扣两分，计算错误扣两分。

------------------------------------------------------------------------------------

可能要用到的公式：

$$\vec{D} = \varepsilon_0\vec{E} + \vec{P} = (1 + \chi_e)\varepsilon_0\vec{E} = \varepsilon_r\varepsilon_0\vec{E} = \varepsilon\ \ \vec{E}$$

真空中电能密度 $w_e = \dfrac{\varepsilon_0 E^2}{2}$