中山大学本科生期末考试

考试科目：《量子力学》（B 卷）

学年学期：**2014** 学年第 **3** 学期　　姓　　名：________________

学 院/系：物理科学与工程技术学院　　学　　号：________________

考试方式：闭卷　　年级专业：________________

考试时长：120 分钟　　班　　别：________________

任课老师：贺彦章

警示 《中山大学授予学士学位工作细则》第八条："考试作弊者，不授予学士学位。"

------------以下为试题区域，共 5 道大题，总分 100 分,考生请在答题纸上作答------------

注意：要求按(1),(2),…步骤，并写详细的推导过程；带星号"*"是选做。

1. 在某温度附近，钠的价电子能量约为5电子伏。(6分)

   (1)利用相对论的动能关系，计算电子的速度v(保留3位有效数字)；

   (2)比较v与光速，说明这个电子是相对论性质还是非相对论性质；

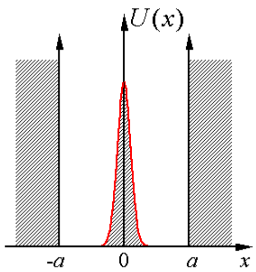
   (3)求电子的德布罗意波长(保留3位有效数字)；

   (4)*讨论分析。

   提示：$T=\dfrac{m_e c^2}{\sqrt{1-v^2/c^2}}-m_e c^2$， $h=6.62559\times10^{-34}\ J\cdot s$， $k=1.38065\times10^{-23}\ J\cdot K^{-1}$，

   $$m_e=9.10908\times10^{-31}\ kg，\quad e=1.60210\times10^{-19}\ C，\quad c=2.99792\times10^{8}\ m\cdot s^{-1}$$

2. 一维粒子在以下的一维势场中运动。(41分)



   $$U=\begin{cases}0, & -a\le x\le a \text{ and } x\ne 0\\ \delta(x), & x=0\\ \infty & x<-a \text{ or } x>a\end{cases}$$

   (1)写出定态薛定谔方程，并化简；

   (2)当$E>0$时，求奇宇称的能级和对应的波函数；

   (3)根据(2)，画出前4个态的波函数示意图；

(4)根据(2)和期望值的定义，求动能的$\overline{T}$；

(5)当$E<0$时，证明薛定谔方程无解；

(6)*讨论分析。

3. 设$t=0$时，粒子的状态为$\psi(x)=A[\sin^2 kx+\frac{1}{3}\cos kx]$。(40分)

(1)利用$\delta(y)$函数的定义，求积分$\int_{-\infty}^{\infty}|\psi(x)|^2\,\mathrm{d}x$；

(2)根据期望值的定义，求位置的$\overline{x}$；

(3)根据期望值的定义，求$\overline{x^2}$；

(4)根据期望值的定义，求动量的$\overline{p}$；

(5)根据(2)、$\delta(y)$函数和期望值的定义，求动能的$\overline{T}$；

(6)求位置和动量的测不准结果$\overline{(\Delta x)^2}\ \overline{(\Delta p)^2}=?$；

(7)*讨论分析。

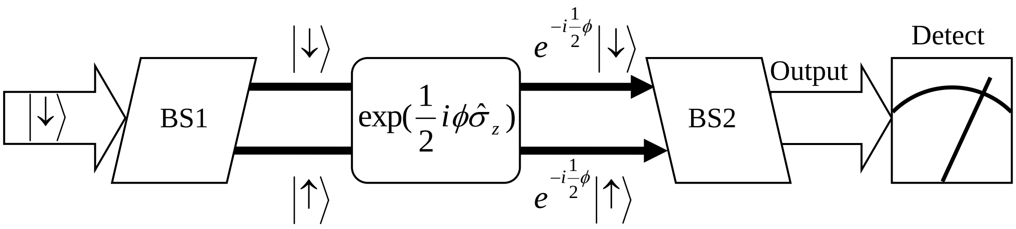
提示：$\int_{-\infty}^{\infty}\exp[\pm iyx]\,\mathrm{d}x=2\pi\delta(y)$，$\delta(gy)=\delta(y)/|g|$

4. 瞬变均匀磁场中的氢原子。体系哈密顿量$H=-\mu_0\vec{\sigma}\cdot\vec{B}(t)$，空间分布均匀的瞬变磁场$\vec{B}(t)=B(t)\vec{e}_z$。其中，电子自旋为$\hbar/2$，内禀磁矩为$\mu_0$，$\vec{e}_z$为**z**轴的正向。设初始自旋波函数为$\begin{pmatrix} a(t=0) \\ b(t=0) \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} e^{-i\alpha}\cos\delta \\ e^{i\alpha}\sin\delta \end{pmatrix}$。(5分)

(1)求瞬时波函数$\begin{pmatrix} a(t) \\ b(t) \end{pmatrix}$；

(2)计算电子自旋三个分量的期望值$\overline{S_x(t)}$、$\overline{S_y(t)}$和$\overline{S_z(t)}$。

5. 基于Mach-Zehnder干涉的量子计量。量子计量学中，基于二态量子粒子的Mach-Zehnder干涉一个被广泛应用的测量方案。此干涉仪的工作原理如下图所示：输入初态$|\downarrow\rangle$，经过第一个分束器BS1后它会变成$|\downarrow\rangle$和$|\uparrow\rangle$两种状态的等几率叠加态；随后，体系进行一个持续时间为T的自由演化过程，期间$|\downarrow\rangle$和$|\uparrow\rangle$这两个态会积累一个相对相位ϕ；接着，体系再经过第二个分束器BS2复合并发生干涉；最后，通过测量末态的粒子数之差就可以得到相对相位ϕ的信息。(8分)



提示：两个分束器BS1和BS2对态的作用都可以用算符$\hat{U}$表示，且$\hat{U}|\downarrow\rangle = (|\downarrow\rangle + |\uparrow\rangle)/\sqrt{2}$和$\hat{U}|\uparrow\rangle = (|\downarrow\rangle - |\uparrow\rangle)/\sqrt{2}$；自由演化阶段的哈密顿量$H = \frac{1}{2}\hbar\omega\sigma_z$，其中$\sigma_z = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$。

(1) 求出算符$\hat{U}$的矩阵表示；

(2) 如果$|\downarrow\rangle$和$|\uparrow\rangle$两个态在自由演化阶段开始时相位相同，求出经过***T***时间的演化后两个态的相对相位$\phi = \phi_\uparrow - \phi_\downarrow$；

(3) 求出末态的布局数之差$\Delta P = P_\uparrow - P_\downarrow$，其中$P_\uparrow$和$P_\downarrow$分别是经过BS2后粒子处于$|\uparrow\rangle$和$|\downarrow\rangle$的概率。