中山大学本科生期末考试

考试科目：《量子力学》（A 卷）

学年学期：**2014** 学年第 **3** 学期　　姓　　名：________________

学 院/系：物理科学与工程技术学院　　学　　号：________________

考试方式：闭卷　　年级专业：________________

考试时长：120 分钟　　班　　别：________________

任课老师：贺彦章

警示《中山大学授予学士学位工作细则》第八条："考试作弊者，不授予学士学位。"

------------以下为试题区域，共 5 道大题，总分 100 分,考生请在答题纸上作答------------

注意：要求按(1)，(2)，…步骤，并写详细的推导过程；带星号"*"是选做。

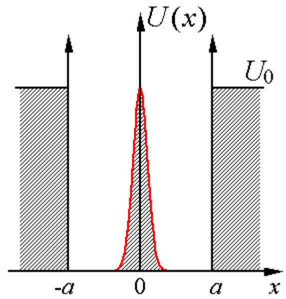
1. 一维粒子在某个势场中运动。在 $t=0$ 时刻，测量发现粒子出现在 $x=0$ 位置。(6分)

(1) 求测量之后的 $t=0$ 时刻粒子波函数 $\Psi(x,0)$；

(2) 同时撤销势场，根据(1)推导 $t\ge 0$ 的动量分布函数；

(3) *讨论分析。

2. 一维粒子在以下的一维势场中运动。(31分)



$$U=\begin{cases}0, & -a\le x\le a \text{ and } x\ne 0\\ \delta(x), & x=0\\ U_0 & x<-a \text{ or } x>a\end{cases}$$

(1) 写出定态薛定谔方程，并化简；

(2) 当 $E>0$ 时，求奇宇称的本征态波函数；

(3) 根据(2)，画出基态的波函数和概率密度的示意图；

(4) 根据(2)，推导奇宇称的态允许存在的条件；

(5) 当 $E>U_0$ 时，证明薛定谔方程的解不是束缚态；

(6) *讨论分析。

提示：不需要确定波函数的振幅

3. 一维谐振子处在第一激发态$\psi(x,t)=A\,x\,e^{-(\alpha^2x^2-i\omega t)/2}$。(50分)

(1)利用归一关系求未知系数***A***；

(2)求最可几位置；

(3)根据期望值的定义，求位置的期望值$\bar{x}$；

(4)根据期望值的定义，求动量的期望值$\bar{p}$；

(5)根据期望值的定义，求动能的期望值$\bar{T}=\frac{1}{2\mu}\overline{p^2}$；

(6)根据期望值的定义，求势能的期望值$\bar{U}=\frac{1}{2}\mu\omega^2\overline{x^2}$；

(7)求位置和动量的测不准结果$\overline{(\Delta x)^2}\ \overline{(\Delta p)^2}=?$；

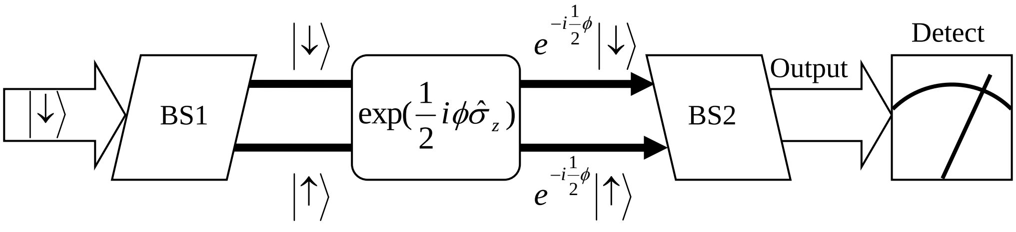
(8) *讨论分析。

提示：$\int_{-\infty}^{\infty}e^{-y^2}y^2dy=\frac{1}{2}\pi^{1/2}$，$\int_{-\infty}^{\infty}e^{-y^2}y^4dy=\frac{3}{4}\pi^{1/2}$

4. 瞬变均匀磁场中的氢原子。体系哈密顿量$H=H_0-\mu_0\vec{\sigma}\cdot\vec{B}$，零磁场哈密顿量为$H_0=\frac{\vec{p}^2}{2\mu}-\frac{e_s^2}{r}$，原子与磁场的相互作用为$H_B=-\mu_0\vec{\sigma}\cdot\vec{B}$。其中，$\vec{\sigma}$为泡利算符，$\mu_0$为内禀磁矩。考虑空间分布均匀的瞬变磁场$\vec{B}(t)$，证明体系的波函数可以表示成空间函数与自旋函数之积，并写出它们满足的波动方程。(5分)

提示：H_0与自旋无关，H_B与空间坐标无关

5. 基于Mach-Zehnder干涉的量子计量。量子计量学中，基于二态量子粒子的Mach-Zehnder干涉一个被广泛应用的测量方案。此干涉仪的工作原理如下图所示：输入初态$|\downarrow\rangle$，经过第一个分束器BS1后它会变成$|\downarrow\rangle$和$|\uparrow\rangle$两种状态的等几率叠加态；随后，体系进行一个持续时间为***T***的自由演化过程，期间$|\downarrow\rangle$和$|\uparrow\rangle$这两个态会积累一个相对相位ϕ；接着，体系再经过第二个分束器BS2复合并发生干涉；最后，通过测量末态的粒子数之差就可以得到相对相位ϕ的信息。(8分)



提示：两个分束器BS1和BS2对态的作用都可以用算符$\hat{U}$表示，且$\hat{U}\left|\downarrow\right\rangle = (\left|\downarrow\right\rangle + \left|\uparrow\right\rangle)/\sqrt{2}$和$\hat{U}\left|\uparrow\right\rangle = (\left|\downarrow\right\rangle - \left|\uparrow\right\rangle)/\sqrt{2}$；自由演化阶段的哈密顿量$H = \frac{1}{2}\hbar\omega\sigma_z$，其中$\sigma_z = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$。

(1)求出算符$\hat{U}$的矩阵表示；

(2)如果$\left|\downarrow\right\rangle$和$\left|\uparrow\right\rangle$两个态在自由演化阶段开始时相位相同，求出经过*T*时间的演化后两个态的相对相位$\phi = \phi_\uparrow - \phi_\downarrow$；

(3)求出末态的布局数之差$\Delta P = P_\uparrow - P_\downarrow$，其中$P_\uparrow$和$P_\downarrow$分别是经过BS2后粒子处于$\left|\uparrow\right\rangle$和$\left|\downarrow\right\rangle$的概率。