中山大学本科生期末考试

考试科目：《量子力学》（B 卷）

学年学期：**2014** 学年第 **3** 学期　　姓　　名：________________

学 院/系：物理科学与工程技术学院　　学　　号：________________

考试方式：闭卷　　年级专业：________________

考试时长：120 分钟　　班　　别：________________

任课老师：贺彦章

警示 《中山大学授予学士学位工作细则》第八条："考试作弊者，不授予学士学位。"

-------------以下为试题区域，共 5 道大题，总分 100 分,考生请在答题纸上作答-------------

注意：要求按(1),(2),…步骤，并写详细的推导过程；带星号"*"是选做。

1. 在某温度附近，钠的价电子能量约为5电子伏。(6分)

(1)利用相对论的动能关系，计算电子的速度v(保留3位有效数字)；

(2)比较v与光速，说明这个电子是相对论性质还是非相对论性质；

(3)求电子的德布罗意波长(保留3位有效数字)；

(4)*讨论分析。

提示：$T=\dfrac{m_ec^2}{\sqrt{1-v^2/c^2}}-m_ec^2$， $h=6.62559\times10^{-34}\ J\cdot s$， $k=1.38065\times10^{-23}\ J\cdot K^{-1}$，

$m_e=9.10908\times10^{-31}\ kg$， $e=1.60210\times10^{-19}\ C$， $c=2.99792\times10^{8}\ m\cdot s^{-1}$

解 (1)利用相对论的动能关系，计算电子的速度v(保留3位有效数字)；

$$T=\frac{m_ec^2}{\sqrt{1-v^2/c^2}}-m_ec^2=eV$$

$$\Rightarrow\frac{m_ec^2}{eV+m_ec^2}=\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}\Rightarrow v=c\sqrt{1-\left(\frac{m_ec^2}{eV+m_ec^2}\right)^2}=c\sqrt{1-\left(\frac{1}{\frac{eV}{m_ec^2}+1}\right)^2}$$

$$\Rightarrow v = 2.99792\times10^{8}\times\sqrt{1-[\frac{1}{\frac{1.60210\times10^{-19}\times10}{9.10908\times10^{-31}\times(2.99792\times10^{8})^{2}}+1}]^{2}} = 1.88\times10^{6}\ m\cdot s^{-1}$$

(2)比较v与光速，说明这个电子是相对论性质还是非相对论性质；

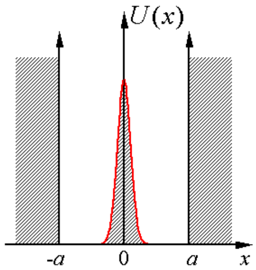
$v<<c$，说明这个电子是非相对论性质

(3)求电子的德布罗意波长(保留3位有效数字)；

$$v<<c\Rightarrow E=\frac{p^2}{2m_e}\Rightarrow\lambda=\frac{h}{p}=\frac{h}{\sqrt{2m_e E}}=\frac{h}{\sqrt{2m_e eV}}$$

$$\Rightarrow\lambda=\frac{6.62559\times10^{-34}}{\sqrt{2\times(9.10908\times10^{-31})\times(1.60210\times10^{-19})\times10}}\approx3.88\times10^{-10}\ \mathrm{m}=3.88\ \mathring{A}$$

2. 一维粒子在以下的一维势场中运动。(41分)



$$U=\begin{cases}0, & -a\le x\le a \text{ and } x\ne0\\ \delta(x), & x=0\\ \infty & x<-a \text{ or } x>a\end{cases}$$

(1)写出定态薛定谔方程，并化简；

(2)当$E>0$时，求奇宇称的能级和对应的波函数；

(3)根据(2)，画出前4个态的波函数示意图；

(4)根据(2)和期望值的定义，求动能的$\overline{T}$；

(5)当$E<0$时，证明薛定谔方程无解；

(6)*讨论分析。

解 (1)写出定态薛定谔方程，并化简；

$$-\frac{\hbar^2}{2\mu}\frac{d^2\psi}{dx^2}+U\psi=E\psi$$

$$\Rightarrow\begin{cases}-\frac{\hbar^2}{2\mu}\frac{d^2\psi}{dx^2}+\infty\psi=E\psi, & x<-a \text{ or } x>a\\ -\frac{\hbar^2}{2\mu}\frac{d^2\psi}{dx^2}=E\psi, & -a\le x<0 \text{ or } 0<x\le a\\ -\frac{\hbar^2}{2\mu}\frac{d^2\psi}{dx^2}+\delta(x)\psi=E\psi, & x=0\end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} \psi = 0, & x < -a \text{ or } x > a \\ \dfrac{d^2\psi}{dx^2} \pm \beta^2\psi = 0, & -a \le x < 0 \text{ or } 0 < x \le a \\ \dfrac{d^2\psi}{dx^2} - \dfrac{2\mu}{\hbar^2}\delta(x)\psi \pm \beta^2\psi = 0, & x = 0 \end{cases}$$

上面 $\beta = \sqrt{\dfrac{2\mu|E|}{\hbar^2}} \ge 0$，当$E$>0时取"+"，$E$<0时取"–"

(2)当 $E > 0$ 时，求奇宇称的能级和对应的波函数；

$$\begin{cases} \psi = 0, & x < -a \text{ or } x > a \\ \psi = A\sin\beta x + B\cos\beta x, & -a \le x < 0 \\ \psi = A\sin\beta x - B\cos\beta x, & 0 < x \le a \\ \psi'(0+) - \psi'(0-) = \dfrac{2\mu}{\hbar^2}\psi(0), & x = 0 \end{cases}$$

波函数在$x=-a,0,a$处连续，要求

$$\begin{cases} 0 = -A\sin\beta a + B\cos\beta a \\ A\sin\beta 0 + B\cos\beta 0 = A\sin\beta 0 - B\cos\beta 0 \\ 0 = A\sin\beta a - B\cos\beta a \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} 0 = A\sin\beta a - B\cos\beta a \\ B = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} A = B = 0, \quad \beta a \ne n\pi \\ A \ne 0, B = 0, \beta a = n\pi \end{cases} \Rightarrow \psi = A\sin\frac{n\pi x}{a}$$

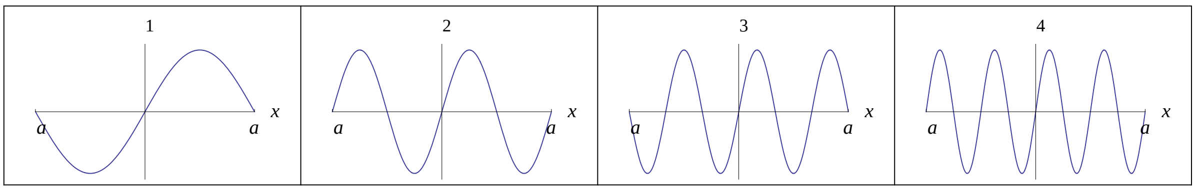
$$1 = \int_{-\infty}^{\infty}\psi^*\psi\,dx = A^2\int_{-a}^{a}\sin^2\frac{n\pi x}{a}dx = A^2 a$$

$$\Rightarrow A = \sqrt{\frac{1}{a}} \Rightarrow \psi = \begin{cases} \sqrt{\dfrac{1}{a}}\sin\dfrac{n\pi x}{a}, & -a \le x \le a \\ 0, & x < -a \text{ or } x > a \end{cases}$$

由$\beta a = n\pi$，有

$$\sqrt{\frac{2\mu E}{\hbar^2}}a = n\pi \Rightarrow E = \frac{n^2\pi^2\hbar^2}{2\mu a^2}$$

(3)根据(2)，画出前4个态的波函数示意图；



(4)根据(2)和期望值的定义，求动能的$\overline{T}$；

$$\bar{T}=\frac{1}{2\mu}\int_{-a}^{a}\sqrt{\frac{1}{a}}\sin\frac{n\pi x}{a}(-i\hbar)^2\frac{\partial^2}{\partial x^2}(\sqrt{\frac{1}{a}}\sin\frac{n\pi x}{a})dy$$
$$=\frac{(-i\hbar)^2}{2\mu}\int_{-a}^{a}\sqrt{\frac{1}{a}}\sin\frac{n\pi x}{a}(\frac{-n^2\pi^2}{c^2}\sqrt{\frac{1}{a}}\sin\frac{n\pi x}{a})dx$$
$$=\frac{(-i\hbar)^2}{2\mu}\frac{-n^2\pi^2}{a^2}\int_{-\infty}^{\infty}\psi^*\psi dx=\frac{n^2\pi^2\hbar^2}{2\mu a^2}$$

(5) 当 $E<0$ 时，证明薛定谔方程无解；

解为

$$\begin{cases}\psi=0, & x<-a \text{ or } x>a\\ \psi=Ae^{\beta x}+Be^{-\beta x}, & -a\le x<0\\ \psi=Ce^{\beta x}+De^{-\beta x}, & 0<x\le a\end{cases}$$

由波函数在 $x=\pm a$ 处连续，得到

$$\begin{cases}0=Ae^{\beta a}+Be^{-\beta a}\\ 0=Ce^{\beta a}+De^{-\beta a}\end{cases}\Rightarrow A=B=0$$

平庸解，舍去，即无解

3. 设 $t=0$ 时，粒子的状态为 $\psi(x)=A[\sin^2 kx+\frac{1}{3}\cos kx]$。(40分)

(1) 利用 $\delta(y)$ 函数的定义，求积分 $\int_{-\infty}^{\infty}|\psi(x)|^2\,\mathrm{d}x$；

(2) 根据 (2) 和期望值的定义，求位置的 $\bar{x}$；

(3) 根据 (2)、$\delta(y)$ 函数和期望值的定义，求 $\overline{x^2}$；

(4) 根据 (2) 和期望值的定义，求动量的 $\bar{p}$；

(5) 根据 (2)、$\delta(y)$ 函数和期望值的定义，求动能的 $\bar{T}$；

(6) 求位置和动量的测不准结果 $\overline{(\Delta x)^2}\ \overline{(\Delta p)^2}=?$；

(7) *讨论分析。

提示：$\int_{-\infty}^{\infty}\exp[\pm iyx]\,\mathrm{d}x=2\pi\delta(y)$，$\delta(gy)=\delta(y)/|g|$

解 (1) 利用 $\delta(y)$ 函数的定义，求积分 $\int_{-\infty}^{\infty}|\psi(x)|^2\,\mathrm{d}x$；

$$\psi(x)=A[\sin^2 kx+\frac{1}{3}\cos kx]=A[(\frac{e^{ikx}-e^{-ikx}}{2i})^2+\frac{1}{3}\frac{e^{ikx}+e^{-ikx}}{2}]$$
$$=A(\frac{e^{i2kx}-2+e^{-i2kx}}{-4}+\frac{e^{ikx}+e^{-ikx}}{6})=\frac{A}{12}(6+2e^{ikx}+2e^{-ikx}-3e^{i2kx}-3e^{-i2kx})$$

$$
\begin{aligned}
\int_{-\infty}^{\infty}|\psi|^2\,\mathrm{d}x &= \int_{-\infty}^{\infty}[\frac{A}{12}(6+2e^{ikx}+2e^{-ikx}-3e^{i2kx}-3e^{-i2kx})]^2\,\mathrm{d}x \\
&= \frac{A^2}{144}\int_{-\infty}^{\infty}(62+12e^{ikx}+12e^{-ikx}-32e^{i2kx}-32e^{-i2kx} \\
&\qquad -12e^{i3kx}-12e^{-i3kx}+9e^{i4kx}+9e^{-i4kx})\,\mathrm{d}x \\
&= \frac{A^2}{144}[62\delta(0)+24\delta(k)-64\delta(2k)-24\delta(3k)+18\delta(4k)] \\
&= \frac{A^2}{144}[62\delta(0)+24\delta(k)-32\delta(k)-8\delta(k)+\frac{9}{2}\delta(k)] \\
&= \frac{A^2}{144}[62\delta(0)-\frac{23}{2}\delta(k)]
\end{aligned}
$$

(2)根据期望值的定义，求位置的 $\bar{x}$；

$$
\int_{-\infty}^{\infty}\psi^*\hat{x}\psi\,\mathrm{d}x = \int_{-\infty}^{\infty}A(\sin^2 kx+\frac{1}{3}\cos kx)xA(\sin^2 kx+\frac{1}{3}\cos kx)\,\mathrm{d}x
$$

$$
= -i\hbar A^2\int_{-\infty}^{\infty}x(\sin^2 kx+\frac{1}{3}\cos kx)^2\,\mathrm{d}x \overset{\text{奇函数}}{=} 0
$$

(3)根据期望值的定义，求 $\overline{x^2}$；

$$
\int_{-\infty}^{\infty}\psi^*\hat{x}^2\psi\,\mathrm{d}x = \int_{-\infty}^{\infty}A(\sin^2 kx+\frac{1}{3}\cos kx)x^2A(\sin^2 kx+\frac{1}{3}\cos kx)\,\mathrm{d}x
$$

$$
= -i\hbar A^2\int_{-\infty}^{\infty}x^2(\sin^2 kx+\frac{1}{3}\cos kx)^2\,\mathrm{d}x \overset{\text{被积函数}>0}{=} \infty
$$

(4)根据期望值的定义，求动量的 $\bar{p}$；

$$
\begin{aligned}
\int_{-\infty}^{\infty}\psi^*\hat{p}\psi\,\mathrm{d}x &= \int_{-\infty}^{\infty}\psi^*(-i\hbar\frac{\partial}{\partial x})\psi\,\mathrm{d}x \\
&= \int_{-\infty}^{\infty}A(\sin^2 kx+\frac{1}{3}\cos kx)(-i\hbar\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x})A(\sin^2 kx+\frac{1}{3}\cos kx)\,\mathrm{d}x \\
&= -i\hbar A^2\int_{-\infty}^{\infty}(\sin^2 kx+\frac{1}{3}\cos kx)(2k\sin kx\cos kx-\frac{k}{3}\sin kx)\,\mathrm{d}x \\
&= -i\hbar kA^2\int_{-\infty}^{\infty}\sin kx(\sin^2 kx+\frac{1}{3}\cos kx)(2\cos kx-\frac{1}{3})\,\mathrm{d}x \overset{\text{奇函数}}{=} 0
\end{aligned}
$$

(5)根据(2)、$\delta(y)$函数和期望值的定义，求动能的 $\bar{T}$；

$$\int_{-\infty}^{\infty}\psi^*\hat{p}^2\psi\,\mathrm{d}x=\int_{-\infty}^{\infty}\psi^*(-\hbar^2\frac{\partial^2}{\partial x^2})\psi\,\mathrm{d}x$$
$$=\int_{-\infty}^{\infty}\frac{A}{12}(6+2e^{ikx}+2e^{-ikx}-3e^{i2kx}-3e^{-i2kx})$$
$$(-\hbar^2\frac{\mathrm{d}^2}{\mathrm{d}x^2})\frac{A}{12}(6+2e^{ikx}+2e^{-ikx}-3e^{i2kx}-3e^{-i2kx})\,\mathrm{d}x$$
$$=-\hbar^2\frac{A^2}{144}\int_{-\infty}^{\infty}(6+2e^{ikx}+2e^{-ikx}-3e^{i2kx}-3e^{-i2kx})$$
$$(-k^2 2e^{ikx}-k^2 2e^{-ikx}+4k^2 3e^{i2kx}+4k^2 3e^{-i2kx})\,\mathrm{d}x$$
$$=-\hbar^2k^2\frac{A^2}{144}\int_{-\infty}^{\infty}(-80+18e^{ikx}+18e^{-ikx}+68e^{i2kx}+68e^{-i2kx})$$
$$+30e^{i3kx}+30e^{-i3kx}-36e^{i4kx}-36e^{-i4kx})\,\mathrm{d}x$$
$$=-\hbar^2k^2\frac{A^2}{144}[-80\delta(0)+36\delta(k)+136\delta(2k)+60\delta(3k)-72\delta(4k)]$$
$$=-\hbar^2k^2\frac{A^2}{144}[-80\delta(0)+36\delta(k)+\frac{136}{2}\delta(k)+\frac{60}{3}\delta(k)-\frac{72}{4}\delta(k)]$$
$$=\hbar^2k^2\frac{A^2}{144}[80\delta(0)-106\delta(k)]$$

$$\overline{p^2}=\frac{\int_{-\infty}^{\infty}\psi^*\hat{p}^2\psi\,\mathrm{d}x}{\int_{-\infty}^{\infty}\psi^*\psi\,\mathrm{d}x}=\frac{\hbar^2k^2\frac{A^2}{144}[80\delta(0)-106\delta(k)]}{\frac{A^2}{144}[62\delta(0)-23\delta(k)/2]}=\hbar^2k^2\frac{80\delta(0)-106\delta(k)}{62\delta(0)-23\delta(k)/2}$$

当k=0时，$\overline{p^2}=\hbar^2k^2\frac{80\delta(0)-106\delta(0)}{62\delta(0)-23\delta(0)/2}=\hbar^2k^2\frac{-52}{101}=0$

当$k\neq0$时，$\delta(k)=0$，那么 $\overline{p^2}=\hbar^2k^2\frac{80\delta(0)}{62\delta(0)}=\frac{40}{31}\hbar^2k^2$

合并为 $\overline{p^2}=\frac{40\hbar^2k^2}{31}$

$$\overline{T}=\frac{\overline{p^2}}{2\mu}=\frac{40}{31}\hbar^2k^2\frac{1}{2\mu}=\frac{20\hbar^2k^2}{31\mu}$$

(6) 求位置和动量的测不准结果 $\overline{(\Delta x)^2}\ \overline{(\Delta p)^2}=?$；

$$\overline{(\Delta x)^2}=\overline{x^2}-\overline{x}^2=\infty-0=\infty$$
$$\overline{(\Delta p)^2}=\overline{p^2}-\overline{p}^2=\frac{40\hbar^2k^2}{31}-0=\frac{40\hbar^2k^2}{31}$$
$$\overline{(\Delta x)^2}\ \overline{(\Delta p)^2}=\infty\frac{40\hbar^2k^2}{31}=\infty\geq\frac{1}{4}\hbar^2$$

4. 瞬变均匀磁场中的氢原子。体系哈密顿量 $H=-\mu_0\vec{\sigma}\cdot\vec{B}(t)$，空间分布均匀的瞬变磁场 $\vec{B}(t)=B(t)\vec{e}_z$。其中，电子自旋为$\hbar/2$，内禀磁矩为 μ_0，$\vec{e}_z$ 为z轴的正向。设初始自

旋波函数为$\begin{pmatrix} a(t=0) \\ b(t=0) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} e^{-i\alpha}\cos\delta \\ e^{i\alpha}\sin\delta \end{pmatrix}$，求瞬时波函数$\begin{pmatrix} a(t) \\ b(t) \end{pmatrix}$，并计算电子自旋三个分量的期望值$\overline{S_x(t)}$、$\overline{S_y(t)}$和$\overline{S_z(t)}$。(5分)

解 (1)求瞬时波函数$\begin{pmatrix} a(t) \\ b(t) \end{pmatrix}$

粒子的波函数满足薛定谔方程

$$i\hbar\frac{\partial}{\partial t}\begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} = H\begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} = -\mu_0\vec{\sigma}\cdot\vec{B}(t)\begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} = -\mu_0\sigma_z B(t)\begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} = -\mu_0\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}B(t)\begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow\begin{cases} i\hbar\dfrac{\partial}{\partial t}a = -\mu_0 B(t)a \\ i\hbar\dfrac{\partial}{\partial t}b = \mu_0 B(t)b \end{cases}\Rightarrow\begin{cases} a(t) = a(t=0)\exp[\dfrac{i\mu_0}{\hbar}\int_0^t B(t)dt] \\ b(t) = b(t=0)\exp[-\dfrac{i\mu_0}{\hbar}\int_0^t B(t)dt] \end{cases}$$

代入初始条件

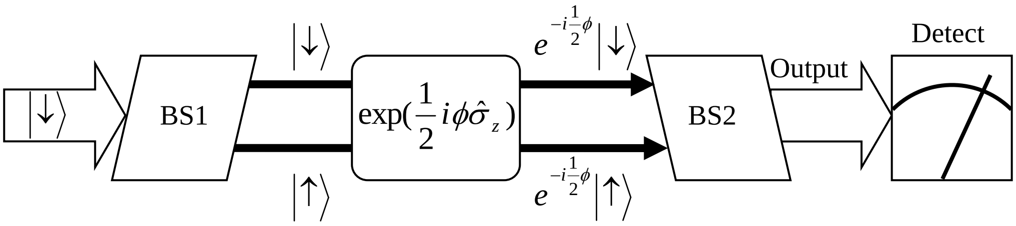
$$\begin{pmatrix} a(t=0) \\ b(t=0) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} e^{-i\alpha}\cos\delta \\ e^{i\alpha}\sin\delta \end{pmatrix}\Rightarrow\begin{cases} a(t) = \cos\delta\exp[\dfrac{i\mu_0}{\hbar}\int_0^t B(t)dt - i\alpha] \\ b(t) = \sin\delta\exp[-\dfrac{i\mu_0}{\hbar}\int_0^t B(t)dt + i\alpha] \end{cases}$$

(2)计算电子自旋三个分量的期望值$\overline{S_x(t)}$、$\overline{S_y(t)}$和$\overline{S_z(t)}$。

所以$\begin{pmatrix} a(t) \\ b(t) \end{pmatrix}$是自旋沿$(\theta,\varphi)$方向分量的本征态，其中$\theta = 2\delta, \varphi = 2(\alpha - \frac{\mu_0}{\hbar}\int_0^t B(t)dt)$

$$\begin{cases} \overline{S_x(t)} = \dfrac{\hbar}{2}\sin 2\delta\cos[\dfrac{2\mu_0}{\hbar}\int_0^t B(t)dt - 2\alpha] \\ \overline{S_y(t)} = \dfrac{\hbar}{2}\sin 2\delta\sin[\dfrac{2\mu_0}{\hbar}\int_0^t B(t)dt - 2\alpha] \\ \overline{S_z(t)} = \dfrac{\hbar}{2}\cos 2\delta \end{cases}$$

5. 基于Mach-Zehnder干涉的量子计量。量子计量学中，基于二态量子粒子的Mach-Zehnder干涉一个被广泛应用的测量方案。此干涉仪的工作原理如下图所示：输入初态$|\downarrow\rangle$，经过第一个分束器BS1后它会变成$|\downarrow\rangle$和$|\uparrow\rangle$两种状态的等几率叠加态；随后，体系进行一个持续时间为T的自由演化过程，期间$|\downarrow\rangle$和$|\uparrow\rangle$这两个态会积累一个相对相位ϕ；接着，体系再经过第二个分束器BS2复合并发生干涉；最后，通过测量末态的粒子数之差就可以得到相对相位ϕ的信息。(8分)



提示：两个分束器BS1和BS2对态的作用都可以用算符$\hat{U}$表示，且$\hat{U}|\downarrow\rangle=(|\downarrow\rangle+|\uparrow\rangle)/\sqrt{2}$

和$\hat{U}|\uparrow\rangle=(|\downarrow\rangle-|\uparrow\rangle)/\sqrt{2}$；自由演化阶段的哈密顿量$H=\frac{1}{2}\hbar\omega\sigma_z$，其中$\sigma_z=\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & -1\end{pmatrix}$。

(1) 求出算符$\hat{U}$的矩阵表示；

(2) 如果$|\downarrow\rangle$和$|\uparrow\rangle$两个态在自由演化阶段开始时相位相同，求出经过***T***时间的演化后两个态的相对相位$\phi=\phi_\uparrow-\phi_\downarrow$；

(3) 求出末态的布局数之差$\Delta P=P_\uparrow-P_\downarrow$，其中$P_\uparrow$和$P_\downarrow$分别是经过BS2后粒子处于$|\uparrow\rangle$和$|\downarrow\rangle$的概率。

解 (1) 求出算符$\hat{U}$的矩阵表示；

设$\hat{U}=\begin{pmatrix}a & b\\ c & d\end{pmatrix}$

$$\begin{cases}\hat{U}|\downarrow\rangle=\begin{pmatrix}a & b\\ c & d\end{pmatrix}\begin{pmatrix}0\\ 1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}b\\ d\end{pmatrix}=d|\downarrow\rangle+b|\uparrow\rangle=(|\downarrow\rangle+|\uparrow\rangle)/\sqrt{2}\Rightarrow b=d=1/\sqrt{2}\\ \hat{U}|\uparrow\rangle=\begin{pmatrix}a & b\\ c & d\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1\\ 0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}a\\ c\end{pmatrix}=c|\downarrow\rangle+a|\uparrow\rangle=(|\downarrow\rangle-|\uparrow\rangle)/\sqrt{2}\Rightarrow c=-a=1/\sqrt{2}\end{cases}$$

$$\Rightarrow\hat{U}=\frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix}-1 & 1\\ 1 & 1\end{pmatrix}$$

(2) 如果$|\downarrow\rangle$和$|\uparrow\rangle$两个态在自由演化阶段开始时相位相同，求出经过***T***时间的演化后两个态的相对相位$\phi=\phi_\uparrow-\phi_\downarrow$；

$$i\hbar\frac{\partial}{\partial t}\psi=H\psi\Rightarrow i\hbar\frac{\partial}{\partial t}\begin{pmatrix}a\\ b\end{pmatrix}=\frac{1}{2}\hbar\omega\sigma_z\begin{pmatrix}a\\ b\end{pmatrix}=\frac{1}{2}\hbar\omega\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & -1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}a\\ b\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\frac{1}{2}\hbar\omega a\\ -\frac{1}{2}\hbar\omega b\end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow\begin{cases}i\hbar\frac{\partial a}{\partial t}=\frac{1}{2}\hbar\omega a\\ i\hbar\frac{\partial b}{\partial t}=-\frac{1}{2}\hbar\omega b\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}\frac{\partial a}{\partial t}=-\frac{i}{2}\omega a\\ \frac{\partial b}{\partial t}=\frac{i}{2}\omega b\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}a(t)=a(0)e^{-\int_0^t\frac{i\omega}{2}dt}=a(0)e^{-\frac{i\omega t}{2}}\\ b(t)=b(0)e^{\int_0^t\frac{i\omega}{2}dt}=b(0)e^{\frac{i\omega t}{2}}\end{cases}$$

所以经过*T*时间的演化后$|\psi\rangle=\frac{1}{\sqrt{2}}e^{-\frac{i\omega T}{2}}|\uparrow\rangle+\frac{1}{\sqrt{2}}e^{\frac{i\omega T}{2}}|\downarrow\rangle$，其中两个态的相对相位

$$\phi=\phi_{\uparrow}-\phi_{\downarrow}=-\frac{\omega T}{2}-\frac{\omega T}{2}=-\omega T$$

(3)求出末态的布局数之差$\Delta P=P_{\uparrow}-P_{\downarrow}$，其中$P_{\uparrow}$和$P_{\downarrow}$分别是经过BS2后粒子处于$|\uparrow\rangle$和$|\downarrow\rangle$的概率。

经过BS2后末态为

$$\begin{aligned}|\psi_f\rangle&=\hat{U}[\frac{1}{\sqrt{2}}e^{-\frac{i\omega T}{2}}|\uparrow\rangle+\frac{1}{\sqrt{2}}e^{\frac{i\omega T}{2}}|\downarrow\rangle]=\hat{U}[\frac{1}{\sqrt{2}}e^{-\frac{i\omega T}{2}}|\uparrow\rangle]+\hat{U}[\frac{1}{\sqrt{2}}e^{\frac{i\omega T}{2}}|\downarrow\rangle]\\&=\frac{1}{\sqrt{2}}e^{-\frac{i\omega T}{2}}(|\downarrow\rangle-|\uparrow\rangle)/\sqrt{2}+\frac{1}{\sqrt{2}}e^{\frac{i\omega T}{2}}(|\downarrow\rangle+|\uparrow\rangle)/\sqrt{2}\\&=\frac{1}{2}e^{-\frac{i\omega T}{2}}|\downarrow\rangle-\frac{1}{2}e^{-\frac{i\omega T}{2}}|\uparrow\rangle+\frac{1}{2}e^{\frac{i\omega T}{2}}|\downarrow\rangle+\frac{1}{2}e^{\frac{i\omega T}{2}}|\uparrow\rangle\\&=\frac{1}{2}(e^{\frac{i\omega T}{2}}-e^{-\frac{i\omega T}{2}})|\uparrow\rangle+\frac{1}{2}(e^{\frac{i\omega T}{2}}+e^{-\frac{i\omega T}{2}})|\downarrow\rangle=i\sin\frac{\omega T}{2}|\uparrow\rangle+\cos\frac{\omega T}{2}|\downarrow\rangle\end{aligned}$$

$$\Rightarrow P_{\uparrow}=\sin^2\frac{\omega T}{2},\quad P_{\downarrow}=\cos^2\frac{\omega T}{2}$$

$$\Rightarrow \Delta P=P_{\uparrow}-P_{\downarrow}=\sin^2\frac{\omega T}{2}-\cos^2\frac{\omega T}{2}=-\cos(\omega T)$$