中山大学本科生期末考试

考试科目：《量子力学》（A 卷）

学年学期：**2014** 学年第 **3** 学期　　　　姓　　名：________________

学 院/系：物理科学与工程技术学院　　　　学　　号：________________

考试方式：闭卷　　　　年级专业：________________

考试时长：120 分钟　　　　班　　别：________________

任课老师：贺彦章

警示 《中山大学授予学士学位工作细则》第八条：“考试作弊者，不授予学士学位。”

-------------以下为试题区域，共 5 道大题，总分 100 分,考生请在答题纸上作答-------------

注意：要求按(1)，(2)，…步骤，并写详细的推导过程；带星号“*”是选做。

1. 一维粒子在某个势场中运动。在$t=0$时刻，测量发现粒子出现在$x=0$位置。(6分)

 (1) 求测量之后的$t=0$时刻粒子波函数$\Psi(x,0)$；

 (2) 同时撤销势场，根据(1)推导$t\geq 0$的动量分布函数；

 (3) *讨论分析。

解 (1) 求测量之后的$t=0$时刻粒子波函数$\Psi(x,0)$；(1分)

$$\Psi(x,0)=\delta(x)$$

(2) 同时撤销势场，根据(1)推导$t\geq 0$的动量分布函数；(5分)

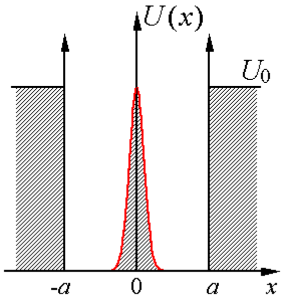
$$\Psi(x,t)=\int c(p)\frac{1}{\sqrt{2\pi\hbar}}e^{ipx/\hbar}e^{-iEt/\hbar}dp$$

$$c(p)=\int \Psi(x,0)\frac{1}{\sqrt{2\pi\hbar}}e^{-ipx/\hbar}dx=\int \delta(x)\frac{1}{\sqrt{2\pi\hbar}}e^{-ipx/\hbar}dx=\frac{1}{\sqrt{2\pi\hbar}}$$

$$w(p)=|c(p)|^2=\frac{1}{2\pi\hbar}$$

2. 一维粒子在以下的一维势场中运动。(31分)

$$U=\begin{cases}0, & -a\le x\le a \text{ and } x\ne 0\\ \delta(x), & x=0\\ U_0 & x<-a \text{ or } x>a\end{cases}$$



(1)写出定态薛定谔方程，并化简；

(2)当 $E>0$ 时，求奇宇称的本征态波函数；

(3)根据(2)，画出基态的波函数和概率密度的示意图；

(4)根据(2)，推导奇宇称的态允许存在的条件；

(5)当 $E>U_0$ 时，证明薛定谔方程的解不是束缚态；

(6)*讨论分析。

提示：不需要确定波函数的振幅

解 (1)写出定态薛定谔方程，并化简；(9分)

$$-\frac{\hbar^2}{2\mu}\frac{d^2\psi}{dx^2}+U\psi=E\psi$$

$$\Rightarrow\begin{cases}-\frac{\hbar^2}{2\mu}\frac{d^2\psi}{dx^2}=E\psi, & -a\le x\le a \text{ and } x\ne 0\\ -\frac{\hbar^2}{2\mu}\frac{d^2\psi}{dx^2}+\delta(x)\psi=E\psi, & x=0\\ -\frac{\hbar^2}{2\mu}\frac{d^2\psi}{dx^2}+U_0\psi=E\psi, & x<-a \text{ or } x>a\end{cases}$$

$$\Rightarrow\begin{cases}\frac{d^2\psi}{dx^2}+k^2\psi=0,\ \ k^2=\frac{2\mu E}{\hbar^2}, & -a\le x\le a \text{ and } x\ne 0\\ \frac{d^2\psi}{dx^2}+\frac{2\mu E}{\hbar^2}\psi-\frac{2\mu\delta(x)}{\hbar^2}\psi=0, & x=0\\ \frac{d^2\psi}{dx^2}\pm k'^2\psi=0,\ \ k'^2=\frac{2\mu|U_0-E|}{\hbar^2}, & x<-a \text{ or } x>a,\ \text{"+"}: E>U_0,\ \text{"−"}: E<U_0\end{cases}$$

(2)当 $E>0$ 时，求奇宇称的本征态波函数；(12分)

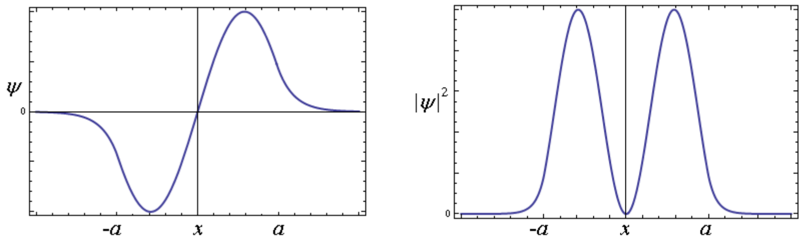
$$E>U_0\Rightarrow\begin{cases}\psi=A\cos(kx)+B\sin(kx)\overset{\text{奇宇称}}{\Rightarrow}\psi=B\sin(kx), & -a\le x\le a \text{ and } x\ne 0\\ \psi'(0+)-\psi'(0-)-\frac{2\mu}{\hbar^2}\psi(0)=0, & x=0\\ \psi=C\cos(k'x)+D\sin(k'x), & x<-a \text{ or } x>a\end{cases}$$

$$\Rightarrow\psi(\pm\infty)\ne 0\Rightarrow \text{散射态}\Rightarrow\text{散射态不对称，无宇称}$$

$$0<E<U_0 \Rightarrow \begin{cases} \psi = A\cos(kx)+B\sin(kx) \overset{\text{奇宇称}}{\Rightarrow} \psi = B\sin(kx), \quad -a\le x\le a \text{ and } x\neq 0 \\ \psi'(0+)-\psi'(0-)-\dfrac{2\mu}{\hbar^2}\psi(0)=0, \quad x=0 \\ \psi = Ce^{k'x}+De^{-k'x} \underset{\psi(\pm\infty)\neq\infty}{\overset{\text{奇宇称}}{\Rightarrow}} \psi = \begin{cases} Ce^{k'x}, & x<-a \\ De^{-k'x}, & x>a \end{cases} \end{cases}$$

$$\Rightarrow \psi = \begin{cases} Ce^{k'x}, & x<-a \\ B\sin(kx) & -a\le x\le a \\ De^{-k'x}, & x>a \end{cases}$$

(3) 根据(2)，画出基态的波函数和概率密度的示意图；(2分)



(4) 根据(2)，推导奇宇称的态允许存在的条件；(4分)

$$\psi(a-)=\psi(a+), \quad \frac{d\psi(a-)}{dx}=\frac{d\psi(a+)}{dx}$$

$$\Rightarrow \frac{d\ln\psi(a-)}{dx}=\frac{d\ln\psi(a+)}{dx} \Rightarrow \frac{d\ln[B\sin(ka)]}{dx}=\frac{d\ln[De^{-k'a}]}{dx}$$

$$\Rightarrow k\cot(ka)=-k'$$

$$k^2=\frac{2\mu E}{\hbar^2}, \quad k'^2=\frac{2\mu(U_0-E)}{\hbar^2} \Rightarrow k^2+k'^2=\frac{2\mu U_0}{\hbar^2}$$

(5) 当 $E>U_0$ 时，证明薛定谔方程的解不是束缚态；(4分)

$$\Rightarrow \begin{cases} \psi = A\cos(kx)+B\sin(kx), & -a\le x\le a \text{ and } x\neq 0 \\ \psi'(0+)-\psi'(0-)-\dfrac{2\mu}{\hbar^2}\psi(0)=0, & x=0 \\ \psi = C\cos(k'x)+D\sin(k'x), & x<-a \text{ or } x>a \end{cases}$$

因为势阱内的波函数是三角函数，所以在边界 $x=\pm a$，波函数及其导数不同时为零。根据连续性条件，**C**和**D**不同时为零，即 $\psi(\pm\infty)\neq 0$，说明这不是束缚态。

3. 一维谐振子处在第一激发态 $\psi(x,t)=A\,x\,e^{-(\alpha^2x^2-i\omega t)/2}$。(50分)

(1) 利用归一关系求未知系数***A***；

(2) 求最可几位置；

(3) 根据期望值的定义，求位置的期望值 $\bar{x}$；

(4)根据期望值的定义，求动量的期望值 $\bar{p}$；

(5)根据期望值的定义，求动能的期望值 $\bar{T}=\dfrac{1}{2\mu}\overline{p^2}$；

(6)根据期望值的定义，求势能的期望值 $\bar{U}=\dfrac{1}{2}\mu\omega^2\overline{x^2}$；

(7)求位置和动量的测不准结果 $\overline{(\Delta x)^2}\ \overline{(\Delta p)^2}=?$；

(8)*讨论分析。

提示：$\int_{-\infty}^{\infty}e^{-y^2}y^2dy=\dfrac{1}{2}\pi^{1/2}$，$\int_{-\infty}^{\infty}e^{-y^2}y^4dy=\dfrac{3}{4}\pi^{1/2}$

解 (1)利用归一关系求未知系数*A*；(7分)

$$1=\int_{-\infty}^{\infty}\psi^*\psi\,dx=\int_{-\infty}^{\infty}A\,x\,e^{-(\alpha^2x^2+i\omega t)/2}A\,x\,e^{-(\alpha^2x^2-i\omega t)/2}dx$$

$$=A^2\int_{-\infty}^{\infty}x^2e^{-\alpha^2x^2}dx=A^2\frac{1}{2\alpha^3}\pi^{1/2}$$

$$\Rightarrow A=\sqrt{\frac{2\alpha^3}{\pi^{1/2}}}$$

(2)求最可几位置；(7分)

$$|\psi|^2=\psi^*\psi=x\,e^{-(\alpha^2x^2+i\omega t)/2}A\,x\,e^{-(\alpha^2x^2-i\omega t)/2}=A^2x^2e^{-\alpha^2x^2}$$

$$0=\frac{d\ln|\psi|^2}{dx}=\frac{d\ln(x^2e^{-\alpha^2x^2})}{dx}=\frac{d\ln(x^2)}{dx}+\frac{d\ln(e^{-\alpha^2x^2})}{dx}=\frac{2}{x}-\alpha^2 2x$$

$$\Rightarrow x=\pm\frac{1}{\alpha}$$

(3)根据期望值的定义，求位置的期望值 $\bar{x}$；(7分)

$$\bar{x}=\int_{-\infty}^{\infty}\psi^*\hat{x}\psi\,dx$$

$$=\int_{-\infty}^{\infty}\sqrt{\frac{2\alpha^3}{\pi^{1/2}}}\,x\,e^{-(\alpha^2x^2+i\omega t)/2}x\sqrt{\frac{2\alpha^3}{\pi^{1/2}}}\,x\,e^{-(\alpha^2x^2-i\omega t)/2}dx$$

$$=\frac{2\alpha^3}{\pi^{1/2}}\int_{-\infty}^{\infty}x^3\,e^{-\alpha^2x^2}dx\overset{\text{奇函数}}{=}0$$

(4)根据期望值的定义，求动量的期望值 $\bar{p}$；(7分)

$$\bar{p}=\int_{-\infty}^{\infty}\psi^{*}\hat{p}\psi\,dx$$
$$=\int_{-\infty}^{\infty}\sqrt{\frac{2\alpha^{3}}{\pi^{1/2}}}\,x\,e^{-(\alpha^{2}x^{2}+i\omega t)/2}(-i\hbar)\frac{d}{dx}[\sqrt{\frac{2\alpha^{3}}{\pi^{1/2}}}\,x\,e^{-(\alpha^{2}x^{2}-i\omega t)/2}]dx$$
$$=-\frac{2i\hbar\alpha^{3}}{\pi^{1/2}}\int_{-\infty}^{\infty}x\,e^{-\alpha^{2}x^{2}/2}(e^{-\alpha^{2}x^{2}/2}-\alpha^{2}x^{2}\,e^{-\alpha^{2}x^{2}/2})dx$$
$$=-\frac{2i\hbar\alpha^{3}}{\pi^{1/2}}\int_{-\infty}^{\infty}(x\,e^{-\alpha^{2}x^{2}}-\alpha^{2}x^{3}\,e^{-\alpha^{2}x^{2}})dx\overset{\text{奇函数}}{=}0$$

(5) 根据期望值的定义，求动能的期望值 $\bar{T}=\frac{1}{2\mu}\overline{p^{2}}$；　(8分)

$$\bar{T}=\frac{1}{2\mu}\overline{p^{2}}=\frac{1}{2\mu}\int_{-\infty}^{\infty}\psi^{*}\hat{p}^{2}\psi dx$$
$$=\frac{1}{2\mu}\int_{-\infty}^{\infty}\sqrt{\frac{2\alpha^{3}}{\pi^{1/2}}}\,x\,e^{-(\alpha^{2}x^{2}+i\omega t)/2}(-i\hbar)^{2}\frac{\partial^{2}}{\partial x^{2}}[\sqrt{\frac{2\alpha^{3}}{\pi^{1/2}}}\,x\,e^{-(\alpha^{2}x^{2}+i\omega t)/2}]dx$$
$$=\frac{-\hbar^{2}\alpha^{3}}{\mu\,\pi^{1/2}}\int_{-\infty}^{\infty}e^{-\alpha^{2}x^{2}}(\alpha^{4}x^{4}-3\alpha^{2}x^{2})dx$$
$$=\frac{-\hbar^{2}\alpha^{5}}{\mu\,\pi^{1/2}}(\alpha^{2}\frac{3}{4\alpha^{5}}\pi^{1/2}-3\frac{1}{2\alpha^{3}}\pi^{1/2})=\frac{3\hbar^{2}\alpha^{2}}{4\mu}=\frac{3}{4}\hbar\omega$$

(6) 根据期望值的定义，求势能的期望值 $\bar{U}=\frac{1}{2}\mu\omega^{2}\overline{x^{2}}$；(7分)

$$\bar{U}=\frac{1}{2}\mu\omega^{2}\overline{x^{2}}=\frac{1}{2}\mu\omega^{2}\int_{-\infty}^{\infty}\psi^{*}\hat{x}^{2}\psi\,dx$$
$$=\frac{1}{2}\mu\omega^{2}\int_{-\infty}^{\infty}\sqrt{\frac{2\alpha^{3}}{\pi^{1/2}}}\,x\,e^{-(\alpha^{2}x^{2}+i\omega t)/2}x^{2}\sqrt{\frac{2\alpha^{3}}{\pi^{1/2}}}\,x\,e^{-(\alpha^{2}x^{2}-i\omega t)/2}dx$$
$$=\frac{1}{2}\mu\omega^{2}\frac{2\alpha^{3}}{\pi^{1/2}}\int_{-\infty}^{\infty}x^{4}\,e^{-\alpha^{2}x^{2}}dx=\frac{1}{2}\mu\omega^{2}\frac{2\alpha^{3}}{\pi^{1/2}}\frac{3}{4\alpha^{5}}\pi^{1/2}=\frac{3\mu\omega^{2}}{4\alpha^{2}}=\frac{3}{4}\hbar\omega$$

(7) 求位置和动量的测不准结果 $\overline{(\Delta x)^{2}}\;\overline{(\Delta p)^{2}}=?$；(7分)

$$\overline{(\Delta x)^{2}}=\overline{x^{2}}-\bar{x}^{2}=\frac{\bar{U}}{\frac{1}{2}\mu\omega^{2}}-0=\frac{3}{4}\hbar\omega\frac{2}{\mu\omega^{2}}=\frac{3\hbar}{2\mu\omega}$$
$$\overline{(\Delta p)^{2}}=\overline{p^{2}}-\bar{p}^{2}=2\mu\bar{T}-0=2\mu\frac{3}{4}\hbar\omega=\frac{3\mu\hbar\omega}{2}$$
$$\overline{(\Delta x)^{2}}\;\overline{(\Delta p)^{2}}=\frac{3\hbar}{2\mu\omega}\frac{3\mu\hbar\omega}{2}=\frac{9}{4}\hbar^{2}\geq\frac{1}{4}\hbar^{2}$$

4. 瞬变均匀磁场中的氢原子。体系哈密顿量 $H=H_{0}-\mu_{0}\vec{\sigma}\cdot\vec{B}$，零磁场哈密顿量为 $H_{0}=\frac{\vec{p}^{2}}{2\mu}-\frac{e_{s}^{2}}{r}$，原子与磁场的相互作用为 $H_{B}=-\mu_{0}\vec{\sigma}\cdot\vec{B}$。其中，$\vec{\sigma}$ 为泡利算符，μ_{0} 为

内禀磁矩。考虑空间分布均匀的瞬变磁场 $\vec{B}(t)$，证明体系的波函数可以表示成空间函数与自旋函数之积，并写出它们满足的波动方程。(5分)

提示：H_0 与自旋无关，H_B 与空间坐标无关

解 粒子的波函数满足薛定谔方程 $i\hbar\frac{\partial}{\partial t}\psi(r,\sigma_z,t)=H\psi(r,\sigma_z,t)$

其中 H_0 与自旋无关，H_B 与空间坐标无关，可以令 $\psi(r,\sigma_z,t)=\varphi(r,t)\chi(\sigma_z,t)$，

$$\Rightarrow i\hbar\frac{\partial}{\partial t}[\varphi(r,t)\chi(\sigma_z,t)]=(H_0-\mu_0\vec{\sigma}\cdot\vec{B})[\varphi(r,t)\chi(\sigma_z,t)]$$

$$\Rightarrow i\hbar\chi\frac{\partial}{\partial t}\varphi+i\hbar\varphi\frac{\partial}{\partial t}\chi=(H_0-\mu_0\vec{\sigma}\cdot\vec{B})(\varphi\chi)$$

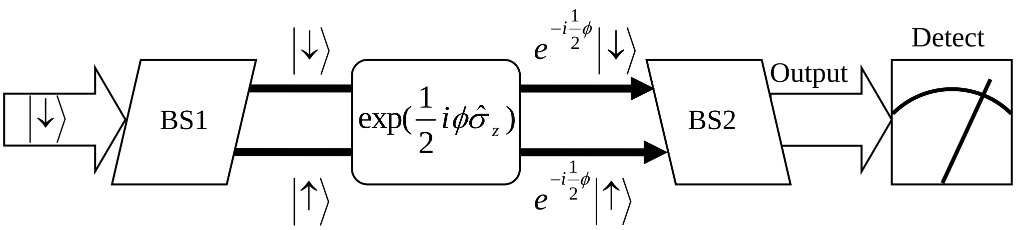
$$\Rightarrow i\hbar\chi\frac{\partial}{\partial t}\varphi+i\hbar\varphi\frac{\partial}{\partial t}\chi=(H_0\varphi)\chi-(\mu_0\vec{\sigma}\cdot\vec{B}\chi)\varphi$$

两边同时除以 $\varphi\chi$，得到 $i\hbar\frac{1}{\varphi}\frac{\partial}{\partial t}\varphi+i\hbar\frac{1}{\chi}\frac{\partial}{\partial t}\chi=(H_0\varphi)\frac{1}{\varphi}-(\mu_0\vec{\sigma}\cdot\vec{B}\chi)\frac{1}{\chi}$

自旋，轨道运动部分分别等同，得到

$$\begin{cases} i\hbar\frac{1}{\varphi}\frac{\partial}{\partial t}\varphi=(H_0\varphi)\frac{1}{\varphi} \\ i\hbar\frac{1}{\chi}\frac{\partial}{\partial t}\chi=(-\mu_0\vec{\sigma}\cdot\vec{B}\chi)\frac{1}{\chi} \end{cases}\Rightarrow\begin{cases} i\hbar\frac{\partial}{\partial t}\varphi=H_0\varphi \\ i\hbar\frac{\partial}{\partial t}\chi=-\mu_0\vec{\sigma}\cdot\vec{B}\chi \end{cases}$$

5. 基于Mach-Zehnder干涉的量子计量。量子计量学中，基于二态量子粒子的Mach-Zehnder干涉一个被广泛应用的测量方案。此干涉仪的工作原理如下图所示：输入初态 $|\downarrow\rangle$，经过第一个分束器BS1后它会变成 $|\downarrow\rangle$ 和 $|\uparrow\rangle$ 两种状态的等几率叠加态；随后，体系进行一个持续时间为T的自由演化过程，期间 $|\downarrow\rangle$ 和 $|\uparrow\rangle$ 这两个态会积累一个相对相位 ϕ；接着，体系再经过第二个分束器BS2复合并发生干涉；最后，通过测量末态的粒子数之差就可以得到相对相位 ϕ 的信息。(8分)



提示：两个分束器BS1和BS2对态的作用都可以用算符 $\hat{U}$ 表示，且 $\hat{U}|\downarrow\rangle=(|\downarrow\rangle+|\uparrow\rangle)/\sqrt{2}$

和$\hat{U}|\uparrow\rangle=(|\downarrow\rangle-|\uparrow\rangle)/\sqrt{2}$；自由演化阶段的哈密顿量$H=\frac{1}{2}\hbar\omega\sigma_z$，其中$\sigma_z=\begin{pmatrix}1&0\\0&-1\end{pmatrix}$。

(1)求出算符$\hat{U}$的矩阵表示；

(2)如果$|\downarrow\rangle$和$|\uparrow\rangle$两个态在自由演化阶段开始时相位相同，求出经过***T***时间的演化后两个态的相对相位$\phi=\phi_\uparrow-\phi_\downarrow$；

(3)求出末态的布局数之差$\Delta P=P_\uparrow-P_\downarrow$，其中$P_\uparrow$和$P_\downarrow$分别是经过BS2后粒子处于$|\uparrow\rangle$和$|\downarrow\rangle$的概率。

解 (1)求出算符$\hat{U}$的矩阵表示；

设$\hat{U}=\begin{pmatrix}a&b\\c&d\end{pmatrix}$

$$\begin{cases}\hat{U}|\downarrow\rangle=\begin{pmatrix}a&b\\c&d\end{pmatrix}\begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}b\\d\end{pmatrix}=d|\downarrow\rangle+b|\uparrow\rangle=(|\downarrow\rangle+|\uparrow\rangle)/\sqrt{2}\Rightarrow b=d=1/\sqrt{2}\\ \hat{U}|\uparrow\rangle=\begin{pmatrix}a&b\\c&d\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}a\\c\end{pmatrix}=c|\downarrow\rangle+a|\uparrow\rangle=(|\downarrow\rangle-|\uparrow\rangle)/\sqrt{2}\Rightarrow c=-a=1/\sqrt{2}\end{cases}$$

$$\Rightarrow\hat{U}=\frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix}-1&1\\1&1\end{pmatrix}$$

(2)如果$|\downarrow\rangle$和$|\uparrow\rangle$两个态在自由演化阶段开始时相位相同，求出经过***T***时间的演化后两个态的相对相位$\phi=\phi_\uparrow-\phi_\downarrow$；

$$i\hbar\frac{\partial}{\partial t}\psi=H\psi\Rightarrow i\hbar\frac{\partial}{\partial t}\begin{pmatrix}a\\b\end{pmatrix}=\frac{1}{2}\hbar\omega\sigma_z\begin{pmatrix}a\\b\end{pmatrix}=\frac{1}{2}\hbar\omega\begin{pmatrix}1&0\\0&-1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}a\\b\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\frac{1}{2}\hbar\omega a\\-\frac{1}{2}\hbar\omega b\end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow\begin{cases}i\hbar\frac{\partial a}{\partial t}=\frac{1}{2}\hbar\omega a\\ i\hbar\frac{\partial b}{\partial t}=-\frac{1}{2}\hbar\omega b\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}\frac{\partial a}{\partial t}=-\frac{i}{2}\omega a\\ \frac{\partial b}{\partial t}=\frac{i}{2}\omega b\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}a(t)=a(0)e^{-\int_0^t\frac{i\omega}{2}dt}=a(0)e^{-\frac{i\omega t}{2}}\\ b(t)=b(0)e^{\int_0^t\frac{i\omega}{2}dt}=b(0)e^{\frac{i\omega t}{2}}\end{cases}$$

所以经过***T***时间的演化后$|\psi\rangle=\frac{1}{\sqrt{2}}e^{-\frac{i\omega T}{2}}|\uparrow\rangle+\frac{1}{\sqrt{2}}e^{\frac{i\omega T}{2}}|\downarrow\rangle$，其中两个态的相对相位

$$\phi=\phi_\uparrow-\phi_\downarrow=-\frac{\omega T}{2}-\frac{\omega T}{2}=-\omega T$$

(3)求出末态的布局数之差$\Delta P=P_\uparrow-P_\downarrow$，其中$P_\uparrow$和$P_\downarrow$分别是经过BS2后粒子处于$|\uparrow\rangle$和$|\downarrow\rangle$的概率。

经过BS2后末态为

$$
\begin{aligned}
\left|\psi_f\right\rangle &= \hat{U}[\frac{1}{\sqrt{2}}e^{-\frac{i\omega T}{2}}\left|\uparrow\right\rangle+\frac{1}{\sqrt{2}}e^{\frac{i\omega T}{2}}\left|\downarrow\right\rangle] = \hat{U}[\frac{1}{\sqrt{2}}e^{-\frac{i\omega T}{2}}\left|\uparrow\right\rangle]+\hat{U}[\frac{1}{\sqrt{2}}e^{\frac{i\omega T}{2}}\left|\downarrow\right\rangle] \\
&= \frac{1}{\sqrt{2}}e^{-\frac{i\omega T}{2}}(\left|\downarrow\right\rangle-\left|\uparrow\right\rangle)/\sqrt{2}+\frac{1}{\sqrt{2}}e^{\frac{i\omega T}{2}}(\left|\downarrow\right\rangle+\left|\uparrow\right\rangle)/\sqrt{2} \\
&= \frac{1}{2}e^{-\frac{i\omega T}{2}}\left|\downarrow\right\rangle-\frac{1}{2}e^{-\frac{i\omega T}{2}}\left|\uparrow\right\rangle+\frac{1}{2}e^{\frac{i\omega T}{2}}\left|\downarrow\right\rangle+\frac{1}{2}e^{\frac{i\omega T}{2}}\left|\uparrow\right\rangle \\
&= \frac{1}{2}(e^{\frac{i\omega T}{2}}-e^{-\frac{i\omega T}{2}})\left|\uparrow\right\rangle+\frac{1}{2}(e^{\frac{i\omega T}{2}}+e^{-\frac{i\omega T}{2}})\left|\downarrow\right\rangle = i\sin\frac{\omega T}{2}\left|\uparrow\right\rangle+\cos\frac{\omega T}{2}\left|\downarrow\right\rangle
\end{aligned}
$$

$$\Rightarrow P_\uparrow = \sin^2\frac{\omega T}{2}, \quad P_\downarrow = \cos^2\frac{\omega T}{2}$$

$$\Rightarrow \Delta P = P_\uparrow - P_\downarrow = \sin^2\frac{\omega T}{2}-\cos^2\frac{\omega T}{2} = -\cos(\omega T)$$