1. 求椭球面 $x^2+y^2+\frac{z^2}{4}=1$ 与平面 $x+y+z=0$ 的交线上的点到坐标原点的最大距离和最小距离。

老师已写过解答，参见“6.9 习题讲解.pdf”

2. 计算下列三重积分：

$$\iiint\limits_{\Omega} z^2 dV,$$

其中 Ω 是由 $x^2+y^2+z^2=R^2$ 和 $x^2+y^2=Rx$ 围成的立体。

解 1、Ω 在坐标面 xOy 上的投影 D 是一个以 $\left(\frac{R}{2},0\right)$ 为中心，$\frac{R}{2}$ 为半径的圆盘；

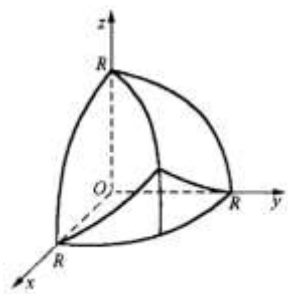
2、立体 Ω 关于坐标面 xOy 对称，函数 z^2 关于变量 z 是偶函数，根据对称性积分是上半部立体上的积分的 2 倍；

3、区域 D：

$$-\frac{\pi}{2}\le\theta\le\frac{\pi}{2},0\le r\le R\cos\theta,$$

$$\begin{aligned}
&\iiint\limits_{\Omega} z^2 dV=2\iiint\limits_{\Omega_{上}} z^2 dV\\
&=2\iint\limits_{D} dxdy\int_0^{\sqrt{R^2-x^2-y^2}} z^2 dz\\
&=\frac{2}{3}\iint\limits_{D}\left(R^2-x^2-y^2\right)^{\frac{3}{2}}dxdy=\frac{2}{3}\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}d\theta\int_0^{R\cos\theta}\left(R^2-r^2\right)^{\frac{3}{2}}\cdot rdr\\
&=\frac{2}{3}\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}\left(\frac{1}{5}R^5-\frac{1}{5}\left(R^2\sin^2\theta\right)^{\frac{5}{2}}\right)d\theta=\frac{2}{15}R^5\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}\left(1-\left|\sin\theta\right|^5\right)d\theta\\
&=\frac{4}{15}R^5\int_0^{\frac{\pi}{2}}\left(1-\sin^5\theta\right)d\theta\\
&=\frac{4}{15}R^5\left(\frac{\pi}{2}-\frac{4}{5}\cdot\frac{2}{3}\right)=\frac{2}{15}R^5\left(\pi-\frac{16}{15}\right)
\end{aligned}$$

3. 求由三个圆柱面 $x^2+y^2=R^2$，$y^2+z^2=R^2$，$x^2+z^2=R^2$ 所围立体的表面积。



老师已写过解答，参见“7.4 习题讲解.pdf”

4. 求双纽线所围区域的面积

双纽线的图形见 P51，图 7.54

图形具有对称性

$$A = 2\cdot\frac{1}{2}\int_{-\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{4}} r^2 d\theta = \int_{-\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{4}} 4\cos 2\theta d\theta = 4$$

5. 求常数 a，b 使

$$\frac{\left(y^2+2xy+ax^2\right)dx-\left(x^2+2xy+bx^2\right)dy}{\left(x^2+y^2\right)^2}$$

是某个函数 $u(x,y)$ 的全微分，并求 $u(x,y)$。

解 令 $P=\frac{y^2+2xy+ax^2}{\left(x^2+y^2\right)^2}$，$Q=-\frac{x^2+2xy+by^2}{\left(x^2+y^2\right)^2}$，则

$$\frac{\partial Q}{\partial x}=\frac{\partial P}{\partial y}$$

解得 $a=b=-1$。

猜测

$$\frac{\left(y^2+2xy+ax^2\right)dx-\left(x^2+2xy+bx^2\right)dy}{\left(x^2+y^2\right)^2}=d\frac{mx+ny}{x^2+y^2},$$

则

$$d\frac{mx+ny}{x^2+y^2}=\frac{\left(-mx^2+my^2-2nxy\right)dx+\left(-ny^2+nx^2-2mxy\right)dy}{\left(x^2+y^2\right)^2},$$

解得 $m=1, n=-1$，所以

$$u(x,y)=\frac{x-y}{x^2+y^2}+C$$

老师之前在作业解答中，用凑微分的方法求出了 $u(x,y)=\frac{x-y}{x^2+y^2}+C$，参见“8.3 习题讲解.pdf”

6.　计算下列第二型曲面积分：

$$\iint_S xy^2dydz + yz^2dzdx + zx^2dxdy,$$

其中 S 为椭球面 $\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}+\dfrac{z^2}{c^2}=1$ 的外侧。

解　设 S 所围成的椭球体为 Ω，根据高斯公式，

$$\iint_S xy^2dydz + yz^2dzdx + zx^2dxdy = \iiint_\Omega \left(y^2+z^2+x^2\right)dV$$

做坐标变换

$$\begin{cases} x = a\rho\cos\theta\sin\varphi \\ y = b\rho\sin\theta\sin\varphi \\ z = c\rho\cos\varphi \end{cases},$$

则 Ω 变换为半径为 1 的球体，$dV = abc\rho^2\sin\varphi d\rho d\theta d\varphi$，根据对称性

$$\iiint_\Omega x^2dV = \iiint_\Omega y^2dV = \iiint_\Omega z^2dV$$

$$= \int_0^{2\pi} d\theta \int_0^{\pi} d\varphi \int_0^1 abc^2\rho^4\cos^2\varphi\sin\varphi d\rho$$

$$= 2\pi abc^2\int_0^{\pi}\cos^2\varphi\sin\varphi d\varphi\int_0^1\rho^4 d\rho$$

$$= \frac{4\pi}{15}abc^2$$

所以，$\displaystyle\iint_S xy^2dydz + yz^2dzdx + zx^2dxdy = \frac{4\pi}{15}abc\left(a^2+b^2+c^2\right)$

7. 求 $\iint\limits_{S^+} x^3dydz + y^3dzdx + z^3dxdy$，其中 S^+ 为球面 $x^2+y^2+z^2=a^2$ 的外侧。

解 设 S^+ 所围成的椭球体为 Ω，根据高斯公式，

$$\iint\limits_{S^+} x^3dydz + y^3dzdx + z^3dxdy = \iiint\limits_{\Omega} 3\left(x^2+y^2+z^2\right)dV$$
$$=3\int_0^{2\pi} d\theta \int_0^{\pi} \sin\varphi d\varphi \int_0^{a} \rho^4 d\rho$$
$$=\frac{12\pi}{5}a^5$$

8. 求微分方程 $y^{''}-2y^{'}+2y=e^2+x\cos x$ 的通解。

解题步骤

1、特征方程 $\lambda^2-2\lambda+2=0$，特征方程的根为 $\lambda_{1,2}=1\pm i$；

2、齐次方程 $y^{''}-2y^{'}+2y=0$ 的通解为

$$y=e^x\left(C_1\cos x+C_2\sin x\right)$$

3、为了求方程的特解，把方程拆分成两个方程，分而治之

- $y^{''}-2y^{'}+2y=e^{0\cdot x}\left(e^2\cdot\cos 0\cdot x+0\cdot\sin 0\cdot x\right)$，

  $\lambda=0+0\cdot i$ 不是特征根，

  设特解为 $y^*(x)=x^0\cdot e^{0\cdot x}\left(a\cdot\cos 0\cdot x+b\cdot\sin 0\cdot x\right)=a$，

  求得 $a=\frac{1}{2}e^2$；

- $y^{''}-2y^{'}+2y=e^{0\cdot x}\left(P_1(x)\cos x+0\cdot\sin x\right)$，

  $\lambda=0+1\cdot i$ 不是特征根，

  设特解为

  $y^*(x)=x^0\cdot e^{0\cdot x}\left(P_1(x)\cos x+Q_1\cdot\sin x\right)=(ax+b)\cos x+(cx+d)\sin x$，

  求得 $a=\frac{1}{5},b=\frac{2}{25},c=-\frac{2}{5},d=-\frac{24}{25}$；

所以原方程的通解为：

$$y=e^x\left(C_1\cos x+C_2\sin x\right)+\frac{e^2}{2}+\left(\frac{1}{5}x+\frac{2}{25}\right)\cos x+\left(-\frac{2}{5}x+-\frac{24}{25}\right)\sin x$$

9. 证明正项级数的积分判别法：

设 $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ 为正项级数。若存在一个单调下降的非负函数 $f(x)(x \geq 1)$，使得

$$u_n = f(n), n = 1,2,3,\ldots$$

则级数 $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ 收敛的充分必要条件是无穷积分 $\int_1^{+\infty} f(x)dx$ 收敛。

见教材上正项级数积分判别法的理的证明

10. 证明级数 $\varsigma(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^x}$ 和 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\ln n}{n^x}$ 在任何区间 $[1+\delta, +\infty)$ 中一致收敛 $(\delta > 0)$。

由此证明函数 $\varsigma(x)$ 在 $(1, +\infty)$ 导函数存在且连续。

1、$\left|\frac{1}{n^x}\right| \leq \frac{1}{n^{1+\delta}}$，$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^{1+\delta}}$ 收敛，由强级数判别法，$\varsigma(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^x}$ 一致收敛；

2、当 n 充分大时，$\left|\frac{\ln n}{n^x}\right| \leq \frac{n^{\frac{1}{2}\delta}}{n^{1+\delta}} = \frac{1}{n^{1+\frac{\delta}{2}}}$，$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^{1+\frac{\delta}{2}}}$ 收敛，由强级数判别法，$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\ln n}{n^x}$ 一致收敛；

3、根据定理 8，要证明导数存在且连续，只需要要检查三个条件：

- $\varsigma(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^x}$ 收敛：前面已证一致收敛；
- $\left(\frac{1}{n^x}\right)' = -\frac{\ln n}{n^x}$ 连续：初等函数连续；
- $\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{1}{n^x}\right)' = -\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\ln n}{n^x}$ 一致收敛：前面已证！

11. 求幂函数 $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(2n)!!}{(2n+1)!!}$ 的收敛半径、收敛区间与收敛域。

解 $\lim_{n\to\infty}\frac{a_{n+1}}{a_n}=\lim_{n\to\infty}\frac{\frac{(2(n+1))!!}{(2(n+1)+1)!!}}{\frac{(2n)!!}{(2n+1)!!}}=\lim_{n\to\infty}\frac{2n+2}{2n+3}=1$，所以收敛半径为 1，收敛区间为 $(-1,1)$。

因为

$$\begin{aligned}
a_n^2&=\left[\frac{(2n)!!}{(2n+1)!!}\right]^2=\left(\frac{2}{3}\right)^2\left(\frac{4}{5}\right)^2\cdots\left(\frac{2n-2}{2n-1}\right)^2\left(\frac{2n}{2n+1}\right)^2\\
&=\frac{2}{3}\cdot\frac{2}{3}\cdot\frac{4}{5}\cdot\frac{4}{5}\cdot\frac{6}{7}\cdot\frac{6}{7}\cdots\cdots\frac{2n-2}{2n-1}\cdot\frac{2n-2}{2n-1}\cdot\frac{2n}{2n+1}\cdot\frac{2n}{2n+1}\\
&\le\frac{2}{3}\cdot\frac{3}{3}\cdot\frac{3}{5}\cdot\frac{5}{5}\cdot\frac{5}{7}\cdot\frac{6}{7}\cdots\cdots\frac{2n-2}{2n-1}\cdot\frac{2n-1}{2n-1}\cdot\frac{2n-1}{2n+1}\cdot\frac{2n}{2n+1}\\
&\le\frac{2}{3}\cdot\frac{3}{5}\cdot\frac{5}{7}\cdots\cdots\frac{2n-2}{2n-1}\cdot\frac{2n-1}{2n+1}\cdot\frac{2n}{2n+1}\\
&=2\cdot\frac{1}{2n+1}\cdot\frac{2n}{2n+1}<\frac{1}{n}
\end{aligned}$$

所以 $a_n<\frac{1}{\sqrt{n}}$。

又因为

$$\begin{aligned}
a_n^2&=\left[\frac{(2n)!!}{(2n+1)!!}\right]^2=\left(\frac{2}{3}\right)^2\left(\frac{4}{5}\right)^2\cdots\left(\frac{2n-2}{2n-1}\right)^2\left(\frac{2n}{2n+1}\right)^2\\
&=\frac{2}{3}\cdot\frac{2}{3}\cdot\frac{4}{5}\cdot\frac{4}{5}\cdot\frac{6}{7}\cdot\frac{6}{7}\cdots\cdots\frac{2n-2}{2n-1}\cdot\frac{2n-2}{2n-1}\cdot\frac{2n}{2n+1}\cdot\frac{2n}{2n+1}\\
&\ge\frac{2}{3}\cdot\frac{2}{4}\cdot\frac{4}{4}\cdot\frac{4}{6}\cdot\frac{6}{6}\cdot\frac{6}{7}\cdots\cdots\frac{2n-2}{2n-1}\cdot\frac{2n-2}{2n}\cdot\frac{2n}{2n}\cdot\frac{2n}{2n+1},\\
&=\frac{2}{3}\cdot\frac{2}{4}\cdot\frac{4}{6}\cdot\frac{6}{7}\cdots\cdots\frac{2n-2}{2n}\cdot\frac{2n}{2n+1}\\
&=\frac{2}{3}\cdot2\cdot\frac{1}{2n+1}\\
&\ge\frac{4}{9n}
\end{aligned}$$

所以 $a_n>\frac{2}{3}\cdot\frac{1}{\sqrt{n}}$。

由此易见，当 $x=-1$ 时，级数是一个交错级数，满足莱布尼茨判别法的条件，级数收敛；当 $x=1$ 时，级数是一个正项级数，根据比较判别法，级数发散。幂级数的收敛域为 $[-1,1)$.