一、求曲线$\begin{cases}3x^2+y^2-z^2=0\\2x+y+z=1\end{cases}$在$(1,1,-2)$处的切线方程。

解 对方程组求全微分，并将$(1,1,-2)$代入，

$$\begin{cases}6xdx+2ydy-2zdz=0\\2dx+dy+dz=0\end{cases},\quad \begin{cases}6dx+2dy+4dz=0\\2dx+dy+dz=0\end{cases},\quad \begin{cases}3dx+dy+2dz=0\\2dx+dy+dz=0\end{cases}。$$

所以

$$dx+dz=0，\quad dz=-dx，\quad dy=-dx 。$$

切线方向为$(1,-1,-1)$，切线方程为

$$\frac{x-1}{1}=\frac{y-1}{-1}=\frac{z+2}{-1}$$

$$x-1=1-y=-(z+2)$$

二、求函数$f(x,y,z)=xyz$在球面$x^2+y^2+z^2=R^2\left(x>0,y>0,z>0\right)$的最大值。

解 构造拉格朗日函数$L(x,y,z;\lambda)=xyz+\lambda\left(x^2+y^2+z^2-R^2\right)$，解方程组

$$\begin{cases}yz+2x\lambda=0\\xz+2y\lambda=0\\xy+2z\lambda=0\\x^2+y^2+z^2=R^2\end{cases},\quad \begin{cases}xyz+2x^2\lambda=0\\xyz+2y^2\lambda=0\\xyz+2z^2\lambda=0\\x^2+y^2+z^2=R^2\end{cases},\quad 2x^2\lambda=2y^2\lambda=2z^2\lambda=xyz，$$

因为$x>0,y>0,z>0$，所以$\lambda\neq0$， $x=y=z=\dfrac{\sqrt{3}}{3}R$。

根据题目的暗示，存在最大值，而最大值只能在唯一的稳定点$x=y=z=\dfrac{\sqrt{3}}{3}R$达到，

所以函数的最大值为$\dfrac{\sqrt{3}}{9}R^3$。

三、求二重积分 $\iint\limits_{D}\left(xy^2+yx^2\right)dxdy,$，其中 D 是由 $y^2=4x$， $x=1$ 围成的平面区域。

解 设 D_1 是 D 的上半部区域。由于区域 D 关于 x 轴对称，函数 yx^2 关于变量 y 是奇函数，

函数 y^2x 关于变量 y 是偶函数，所以

$$\begin{aligned}
&\iint\limits_{D}\left(xy^2+yx^2\right)dxdy=\iint\limits_{D}xy^2dxdy=2\iint\limits_{D_1}xy^2dxdy\\
&=2\int_0^2dy\int_{\frac{y^2}{4}}^1xy^2dx=\int_0^2\left(1-\frac{y^4}{16}\right)y^2dy\\
&=\frac{1}{3}\times2^3-\frac{2^7}{16\times7}\\
&=\frac{32}{21}
\end{aligned}$$

四、求二次积分 $\int_0^2dy\int_y^2e^{x^2}dx$ 。

解 先交换积分的次序再积分

$$\int_0^2dy\int_y^2e^{x^2}dx=\int_0^2dx\int_0^xe^{x^2}dy=\int_0^2xe^{x^2}dx=\frac{1}{2}\int_0^2e^{x^2}dx^2=\frac{1}{2}e^{x^2}\Big|_0^2=\frac{1}{2}\left(e^4-1\right)$$

五、求第一型曲线积分 $\int\limits_{L}\left(x^2+y^2\right)ds,$，其中 L 是正方形 $|x|+|y|=1$ 的边界。

解 设 L_1 是 L 的在第一象限的部分，根据对称性

$$\begin{aligned}
&\int\limits_{L}\left(x^2+y^2\right)ds=4\int\limits_{L_1}\left(x^2+y^2\right)ds=4\int_0^1\left(x^2+(1-x)^2\right)\cdot\sqrt{2}dx\\
&=4\sqrt{2}\int_0^1\left(2x^2-2x+1\right)dx\\
&=4\sqrt{2}\left(\frac{2}{3}-1+1\right)=\frac{8}{3}\sqrt{2}
\end{aligned}$$

六、求第二型曲面积分 $\iint\limits_{S} xydydz + xzdzdx - zydxdy,$，其中 S 是上半椭球面

$\frac{x^2}{a^2} + \frac{x^{\ 2}}{b^2} + \frac{x^{\ 2}}{c^2} = 1$ 的下侧。

解 设上半椭球体为 Ω，S_1 是上半椭球体的底面，规定 S_1 的方向向上，则 $S + S_1$ 构成上半椭球体的内侧，根据高斯公式

$$-\iint\limits_{S+S_1} xydydz + xzdzdx - zydxdy = \iiint\limits_{\Omega} (y + 0 - y) dxdydz = 0$$

所以

$$\iint\limits_{S} xydydz + xzdzdx - zydxdy = -\iint\limits_{S_1} xydydz + xzdzdx - zydxdy = 0$$

七、求微分方程 $\frac{dy}{dx} = \frac{y}{x-y}$ 的通积分。

解 改写方程为

$$\frac{dx}{dy} = \frac{x-y}{y} = \frac{x}{y} - 1,$$

并把 y 看着自变量，则方程是一个一阶非齐次线性常微分方程，解决的方法是常数变异法！

1、先解方程 $\frac{dx}{dy} = \frac{x}{y}$。显然 $x = 0$ 是一个特解。

当 $x \neq 0$ 时，

$$\frac{dx}{x} = \frac{dy}{y}, \quad \ln|x| = \ln|y| + C_1, \quad |x| = e^{C_1}|y|, \quad x = \pm e^{C_1} y \triangleq Cy,$$

其中 $C = \pm e^{C_1} \neq 0$。

当 $C = 0$ 正好得到特解 $x = 0$，故 $\frac{dx}{dy} = \frac{x}{y}$ 的通解为 $x = Cy$，其中 C 为任意常数。

2、常数变异，假设 $x = C(y)y$ 是 $\frac{dx}{dy} = \frac{x-y}{y} = \frac{x}{y} - 1$ 的解，则

$$C'(y)y + C(y) = C(y) - 1$$

$$C'(y) = -\frac{1}{y}, C(y) = -\ln|y| + C$$

故原方程的通积分为

$$x = (-\ln|y| + C)y = cy - y\ln|y|$$

八、求微分方程 $y''-2y'+2y=2+\cos x$ 的通解。

解 1、特征方程为 $\lambda^2-2\lambda+2=0$，特征根为 $\lambda_{1,2}=1\pm i$，对应的齐次线性微分方程 $y''-2y'+2y=0$ 的通解是

$$y=e^x\left(C_1\cos x+C_2\sin x\right)$$

2、显然 $y=1$ 是 $y''-2y'+2y=2$ 的一个特解。以下再求 $y''-2y'+2y=\cos x$ 一个特解。

3、因为 $f(x)=\cos x=e^{0\cdot x}\left(1\cdot\cos x+0\cdot\sin x\right)$，且 $0+1\cdot i$ 不是特征方程的根，所以可设特解为

$$y(x)=x^0e^{0\cdot x}\left(a\cdot\cos x+b\cdot\sin x\right)=a\cdot\cos x+b\cdot\sin x,$$

代入方程

$$\left(-a\cdot\cos x-b\cdot\sin x\right)-2\left(-a\cdot\sin x+b\cdot\cos x\right)+2\left(a\cdot\cos x+b\cdot\sin x\right)=\cos x$$

$$\begin{cases}-a-2b+2a=1\\-b+2a+2b=0\end{cases},\quad a=\frac{1}{5},b=-\frac{2}{5}$$

故 $y=\frac{1}{5}\cos x-\frac{2}{5}\sin x$ 是 $y''-2y'+2y=\cos x$ 的一个特解。

4、故原方程的通解为

$$y=e^x\left(C_1\cos x+C_2\sin x\right)+1+\frac{1}{5}\cos x-\frac{2}{5}\sin x$$