第一题

1、构造拉格朗日函数 $L\left(x,y,z;\lambda\right)=\sin x\sin y\sin z-\lambda\left(x+y+z-\frac{\pi}{2}\right)$

2、解方程组

$$\begin{cases}\cos x\sin y\sin z-\lambda=0\\ \sin x\cos y\sin z-\lambda=0\\ \sin x\sin y\cos z-\lambda=0\\ x+y+z=\frac{\pi}{2}\end{cases},$$

$$\begin{cases}\sin x\sin y\sin z-\lambda\tan x=0\\ \sin x\sin y\sin z-\lambda\tan y=0\\ \sin x\sin y\sin z-\lambda\tan z=0\\ x+y+z=\frac{\pi}{2}\end{cases}$$

$$\lambda\tan x=\lambda\tan y=\lambda\tan z$$

根据题目的条件，$\lambda\neq 0$，所以 $x=y=z=\frac{\pi}{6}$。

3、根据问题的假设，存在最大值，则最大值只能在 $x=y=z=\frac{\pi}{6}$ 达到，最大值为 $\frac{1}{8}$。

第二题

1、设上半球面与柱面的截面记为S，则S在在xOy上的投影为一个椭圆盘D：

$$x^2-2ax+2y^2\le 0，\frac{(x-a)^2}{a^2}+\frac{y^2}{\left(\frac{a}{\sqrt{2}}\right)^2}\le 1$$

2、几何上易见，球面上的点$\left(x,y,z\right)$的法方向也可以取$\left(x,y,z\right)$，单位化后得到方向余弦

$$n=\left(\cos\alpha,\cos\beta,\cos\gamma\right)=\frac{1}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}}\left(x,y,z\right)=\frac{1}{2a}\left(x,y,z\right)$$

3、所以面积元为$dS=\dfrac{dxdy}{\left|\cos\gamma\right|}=\dfrac{2a}{z}dxdy=\dfrac{2a}{\sqrt{4a^2-x^2-y^2}}dxdy$

4、最后求曲面的面积

$$S=\iint_S dS=\iint_D \frac{2a}{\sqrt{4a^2-x^2-y^2}}dxdy$$
$$=\int_0^{2\pi}d\theta\int_0^1\frac{2a}{\sqrt{4a^2-\left(a+ar\cos\theta\right)^2-\left(\frac{a}{\sqrt{2}}r\sin\theta\right)^2}}\cdot\frac{a^2r}{\sqrt{2}}dr$$

其中，为了将二重积分化为二次积分，用了坐标变换：

$$\begin{cases}x=a+ar\cos\theta\\ y=\dfrac{a}{\sqrt{2}}r\sin\theta\end{cases}，\frac{D(x,y)}{D(r,\theta)}=\begin{vmatrix}a\cos\theta & \dfrac{a}{\sqrt{2}}\sin\theta\\ -ar\sin\theta & -\dfrac{a}{\sqrt{2}}r\cos\theta\end{vmatrix}=-\frac{a^2}{\sqrt{2}}r$$

第三题

1、先看两个曲面的交线：

$$\begin{cases} z=(x-1)^2+y^2, \text{椭圆抛物面} \\ x^2+y^2=4, \text{圆柱} \end{cases}$$

即

$$\begin{cases} 2x+z=5, \text{平面} \\ z=(x-1)^2+y^2, \text{椭圆抛物面} \end{cases}$$

所以 S^+ 也可以看着椭圆抛物面被平面截下来的部分。

2、平面的法向量为 $(2,0,1)$，所以

$$(\cos\alpha,\cos\beta,\cos\gamma)dS=(dydz,dzdx,dxdy)$$

$$dydz:dzdx:dxdy=\cos\alpha:\cos\beta:\cos\gamma=2:0:1$$

3、S^+ 和顶部的平面构成一个封闭的立体的边界曲面，该立体在 xOz 上的投影为以原点为中心，半径为 2 的圆盘 D。

设立体的顶部平面区域为 $S_{\text{顶}}$，方向向上，根据高斯公式

$$\iint_{S^+} ydydz+xydzdx-xzdxdy+\iint_{S_{\text{顶}}} ydydz+xydzdx-xzdxdy=0$$

所以

$$\begin{aligned}
&\iint_{S^+} ydydz+xydzdx-xzdxdy \\
&=-\iint_{S_{\text{顶}}} ydydz+xydzdx-xzdxdy \\
&=-\iint_{S_{\text{顶}}} y\cdot 2dxdy+xy\cdot 0dxdy-xzdxdy \\
&=\iint_{S_{\text{顶}}} (xz-2y)dxdy \\
&=\iint_D \left(x(5-2x)-2y\right)dxdy=\iint_D 5x-2x^2-2ydxdy \\
&=\iint_D -2x^2dxdy=-2\int_0^{2\pi} d\theta\int_0^2 r^2\cos^2\theta\cdot rdr \\
&=-8\int_0^{2\pi}\cos^2\theta d\theta=-32\int_0^{\frac{\pi}{2}}\cos^2\theta d\theta=-8\pi
\end{aligned}$$

第四题

1、 首先解对应的齐次线性方程 $x\dfrac{dy}{dx}-2y=0$ 。当 $y\neq 0$ 时（$y=0$ 为特解），

$$\frac{dy}{y}=2\frac{dx}{x},\int\frac{dy}{y}=2\int\frac{dx}{x},\ln|y|=2\ln|x|+C_1,|y|=e^{C_1}x^2,\ y=\pm e^{C_1}x^2=Cx^2,$$

其中 $C=\pm e^{C_1}$，C_1 为任意常数。

合并特解 $y=0$，齐次方程的通解为 $y=Cx^2$，C 为任意常数。

2、 常数变异，假设 $y=C(x)x^2$ 是 $x\dfrac{dy}{dx}-2y=x^2$ 的解，则

$$x\left(C^{'}(x)x^2+2C(x)x\right)-2C(x)x^2=x^2,C^{'}(x)x^3=x^2,C^{'}(x)=\frac{1}{x},C(x)=\ln|x|+C$$

3、 所以原方程的通解为

$$y=C(x)x^2=\left(\ln|x|+C\right)x^2$$