1、 用条件极值法，找出椭圆周 $2x^2+y^2=1$ 上到直线 $x+y=10$ 距离最短的点，并求最短距离。

解　椭圆上的点的坐标记为 (x,y)，直线上的点的坐标记为 (u,v)，距离最短等价于距离的平方最短，所以该条件极值问题为：

极值函数：$(x-u)^2+(y-v)^2$，

约束条件：$2x^2+y^2=1$，$u+v=10$，

所以可以构造拉格朗日函数

$$L(x,y,u,v;\lambda,\mu)=(x-u)^2+(y-v)^2+\lambda(2x^2+y^2-1)+\mu(u+v-10)$$

接下来求解方程组

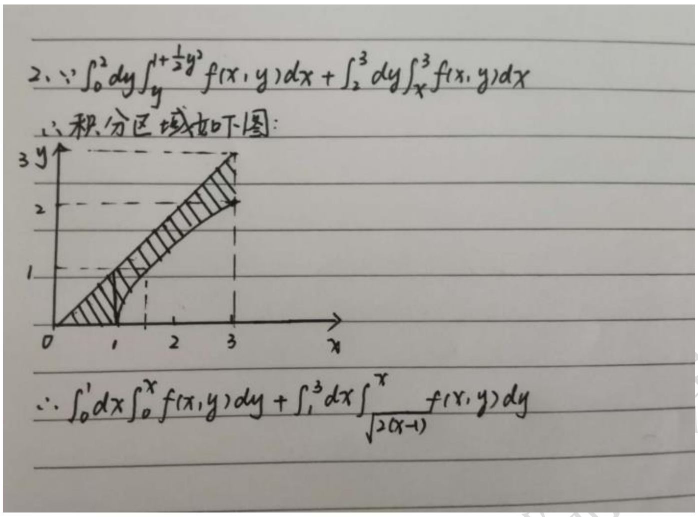
$$\begin{cases}\frac{\partial L}{\partial x}=2(x-u)+4\lambda x=0\\ \frac{\partial L}{\partial y}=2(y-v)+2\lambda y=0\\ \frac{\partial L}{\partial u}=-2(x-u)+\mu=0\\ \frac{\partial L}{\partial u}=-2(y-v)+\mu=0\\ 2x^2+y^2=1\\ u+v=10\end{cases},\quad \begin{cases}(x-u)+2\lambda x=0\\ (y-v)+\lambda y=0\\ -2(x-u)+\mu=0\\ -2(y-v)+\mu=0\\ 2x^2+y^2=1\\ u+v=10\end{cases},$$

$$(x-u)=(y-v),2\lambda x=\lambda y,y=2x,6x^2=1,x=\pm\frac{\sqrt{6}}{6},y=\pm\frac{\sqrt{6}}{3}$$

再求出 (u,v)，则得到了直线到椭圆的最远距离和最近距离（**略，留给同学们做**）！

2、 交换二次积分的次序

$$\int_0^2 dy\int_x^{1+\frac{1}{2}y^2} f(x,y)dx+\int_2^3 dy\int_x^3 f(x,y)dx$$



3、 求第二型曲线积分

$$\oint_{L^+} yz^2dx + zx^2dy + xy^2dz \text{，}$$

其中 L^+ 是曲线

$$\begin{cases} 2x+3y+z=6 \\ (x-1)^2+y^2=1 \end{cases},$$

且从 z 轴往下看取顺时针方向。

基本知识点

1、 $2x+3y+z=6$ 是一个平面方程，$(2,3,1)$ 是一个法方向。

2、$(x-1)^2+y^2=1$ 是一个圆柱，圆柱的母线平行于 z 轴，准线是坐标面 xOy 上的一个圆周，该圆周的中心是 $(1,0)$，半径是 1，记该圆周所包围的坐标面 xOy 上的区域为 D_1 。

3、以 D_0 记坐标面 xOy 上的以原点为中心，半径是 1 的圆周所围成的的区域。

4、$\begin{cases} 2x+3y+z=6 \\ (x-1)^2+y^2=1 \end{cases}$ 表示圆柱和平面的交线，几何上是一个椭圆。设 S 表示由该椭圆所围成的平面区域。根据题目的“顺时针”条件，有向曲面 S 的法方向为 $-(2,3,1)$，单位化得

$$\vec{n} = -\frac{1}{\sqrt{14}}(2,3,1)$$

5、利用函数的奇偶性和区域的对称性

$$\iint_{D_0} xydxdy = \iint_{D_0} xdxdy \iint_{D_0} ydxdy = 0$$

6、利用形式对称性，$\iint_{D_0} x^2dxdy = \iint_{D_0} y^2dxdy$

7、要求牢记的公式：$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^n \theta d\theta = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^n \theta d\theta = \ldots\ldots$

解题思路

第二类曲线积分

$\xrightarrow{\text{斯托克斯公式}}$ 第一型曲面积分

$\longrightarrow$ 重积分 $\iint_{D_1}$

$\xrightarrow{\text{平移坐标变换}}$ 重积分 $\iint_{D_0}$

$\longrightarrow$ 二次积分

解

$$\oint_{L^+} yz^2dx+zx^2dy+xy^2dz \qquad \text{第二类曲线积分}$$

$$\xlongequal{\text{斯托克斯公式}}\oiint_S \begin{vmatrix} dydz & dzdx & dxdy \\ \dfrac{\partial}{\partial x} & \dfrac{\partial}{\partial y} & \dfrac{\partial}{\partial z} \\ yz^2 & zx^2 & xy^2 \end{vmatrix} \qquad \text{第二型曲面积分}$$

$$=\oiint_S \left(2xy-x^2\right)dydz+\left(2yz-y^2\right)dzdx+\left(2xz-z^2\right)dxdy$$

$$=\oiint_S \left(\left(2xy-x^2\right),\left(2yz-y^2\right),\left(2xz-z^2\right)\right)\cdot\left(dydz,dzdx,dxdy\right)$$

$$\xlongequal{\text{转化为第一类曲面积分}}\oiint_S \left(\left(2xy-x^2\right),\left(2yz-y^2\right),\left(2xz-z^2\right)\right)\cdot\vec{n}dS$$

$$=-\frac{1}{\sqrt{14}}\oiint_S \left[2\left(2xy-x^2\right)+3\left(2yz-y^2\right)+\left(2xz-z^2\right)\right]dS$$

$$\xlongequal{\text{转化为二重积分}}-\iint_{D_1}\left[2\left(2xy-x^2\right)+3\left(2yz-y^2\right)+\left(2xz-z^2\right)\right]dxdy$$

$$=\iint_{D_1}\left[\left(2x^2+3y^2+z^2\right)-\left(4xy+\left(6y+2x\right)z\right)\right]dxdy$$

$$=\iint_{D_1}\left[\left(2x^2+3y^2+\left(6-2x-3y\right)^2\right)-\left(4xy+\left(6y+2x\right)\left(6-2x-3y\right)\right)\right]dxdy$$

$$\xlongequal{\text{平移变换}}\iint_{D_0}\begin{bmatrix}\left(2(x+1)^2+3y^2+\left(6-2(x+1)-3y\right)^2\right) \\ -\left(4(x+1)y+\left(6y+2(x+1)\right)\left(6-2(x+1)-3y\right)\right)\end{bmatrix}dxdy$$

$$=\iint_{D_0}\left[\left(2(x+1)^2+3y^2+\left(4-2x-3y\right)^2\right)-\left(4xy+4y+\left(2x+6y+2\right)\left(-2x-3y+4\right)\right)\right]dxdy$$

$$\xlongequal{\text{红色项积分为0}}\iint_{D_0}\left[\left(10x^2+30y^2\right)+\left(k_1xy+k_2x+k_3y\right)+10\right]dxdy$$

$$=10\iint_{D_0}x^2dxdy+30\iint_{D_0}y^2dxdy+10\iint_{D_0}dxdy$$

$$\xlongequal{\text{形式对称性}}40\iint_{D_0}x^2dxdy+10\iint_{D_0}dxdy$$

$$=40\int_0^{2\pi}\cos^2\theta d\theta\int_0^1 r^3dr+10\pi$$

$$=10\int_0^{2\pi}\cos^2\theta d\theta+10\pi=40\int_0^{\frac{\pi}{2}}\cos^2\theta d\theta+10\pi$$

$$=40\cdot\frac{1}{2}\cdot\frac{\pi}{2}+10\pi=20\pi$$

4、 求解如下微分方程柯西初值问题的显式解：

$$\begin{cases} \dfrac{dy}{dx} = x\left(1-y^2\right) \\ y(0) = 2 \end{cases}$$

解 当 $y \neq \pm 1$ 时，

$$\frac{dy}{1-y^2} = xdx$$

$$\frac{1}{2}\left(\frac{1}{1-y} + \frac{1}{1+y}\right)dy = xdx$$

$$\frac{1}{2}\int\left(\frac{1}{1-y} + \frac{1}{1+y}\right)dy = \int xdx$$

$$\frac{1}{2}\ln\left|\frac{1+y}{1-y}\right| = \frac{1}{2}x^2 + C_1$$

$$\ln\left|\frac{1+y}{1-y}\right| = x^2 + 2C_1$$

$$\left|\frac{1+y}{1-y}\right| = e^{x^2+2C_1} = e^{2C_1}e^{x^2}$$

$$\frac{1+y}{1-y} = \pm e^{2C_1}e^{x^2} = Ce^{x^2}$$

$$\frac{2}{1-y} = 1 + Ce^{x^2}$$

$$1-y = \frac{2}{1+Ce^{x^2}}$$

$$y = 1 - \frac{2}{1+Ce^{x^2}}$$

其中 C_1、C 是任意常数。

注意：$y = \pm 1$ 是微分方程的两个奇异解，但不是这个初值问题的解。

代入初值 $y(0) = 2$，$2 = 1 - \dfrac{2}{1+C}$，$C = -3$，所以初值问题的解为 $y = 1 - \dfrac{2}{1-3e^{x^2}}$。