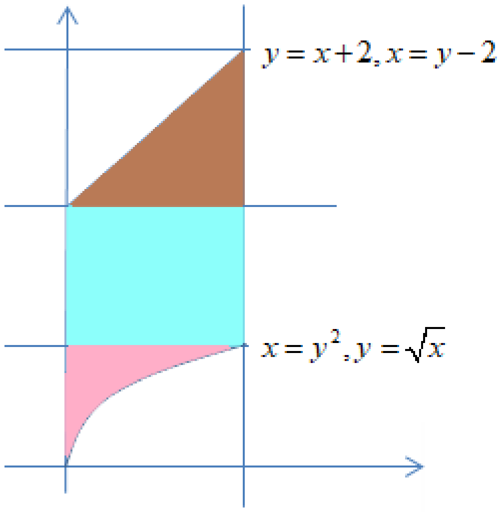
1. （8 分）交换二次积分的次序

$$\int_0^1 dy\int_0^{y^2} f(x,y)dx+\int_1^2 dy\int_0^1 f(x,y)dx+\int_2^3 dy\int_{y-2}^1 f(x,y)dx .$$

解 1、画出二重积分的积分区域



------绘制每个小区域各 1 分，合计---------　3 分

2、交换二次积分

$$\text{原式}=\iint_D f(x,y)dxdy=\int_0^1 dx\int_{\sqrt{x}}^{x+2} f(x,y)dy$$

---8 分

评分说明

没有绘图直接写答案至多只能给 5 分；

第 2 步，交换二次积分，4 个上下限，酌情给分

2. （6 分）求曲面 $z = x^2 + y^2$ 被平面 $z = 2$ 所截部分的面积.

解 1、所截部分在坐标面 xOy 的投影是一个圆盘：$x^2 + y^2 = \left(\sqrt{2}\right)^2$；

-- 1 分

2、面积元：$dS = \sqrt{1+(2x)^2+(2y)^2}dxdy$；

-- 3 分

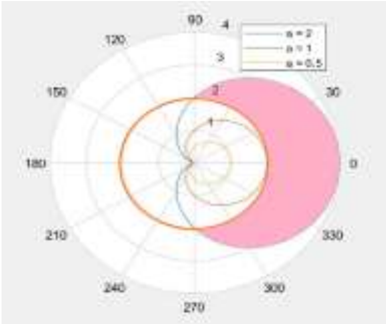
3、写出面积公式，并计算二重积分

$$
\begin{aligned}
S &= \iint_D \sqrt{1+(2x)^2+(2y)^2}dxdy \\
&= \int_0^{2\pi} d\theta \int_0^{\sqrt{2}} \sqrt{1+4r^2} \cdot rdr \\
&= \frac{1}{8}\int_0^{2\pi} d\theta \int_0^{\sqrt{2}} \sqrt{1+4r^2} d\left(1+4r^2\right) \\
&= \frac{1}{8}\int_0^{2\pi} \frac{2}{3}\left(1+4r^2\right)^{\frac{3}{2}}\Bigg|_0^{\sqrt{2}} d\theta = \frac{1}{12}\int_0^{2\pi} 26 d\theta \\
&= \frac{13}{3}\pi
\end{aligned}
$$

-- 6 分

3.　（6 分）求二重积分 $\iint\limits_D r d\sigma$，其中 D 是心脏线 $r=a(1+\cos\theta)$ 与圆周 $r=a\ (a>0)$ 所围的不包含原点的区域.

解　1、画图；



-- 1 分

2、确定极坐标下的积分区域

$$D=\left\{(r,\theta)\middle|-\frac{\pi}{2}\le\theta\le\frac{\pi}{2},a\le r\le a(1+\cos\theta)\right\};$$

-- 2 分

3、计算

$$d\sigma=rdrd\theta$$

$$\iint\limits_D rd\sigma=\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}d\theta\int_a^{a(1+\cos\theta)}r\cdot rdr$$

-- 3 分

$$\iint\limits_D rd\sigma=\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}d\theta\int_a^{a(1+\cos\theta)}r\cdot rdr=\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}\frac{1}{3}r^{\frac{3}{2}}\Big|_a^{a(1+\cos\theta)}d\theta=\frac{1}{3}\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}r^3\Big|_a^{a(1+\cos\theta)}d\theta$$

$$=\frac{a^3}{3}\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}\left[(1+\cos\theta)^3-1\right]d\theta=\frac{a^3}{3}\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}\left(3\cos\theta+3\cos^2\theta+\cos^3\theta\right)d\theta$$

$$=\frac{2a^3}{3}\int_0^{\frac{\pi}{2}}\left(3\cos\theta+3\cos^2\theta+\cos^3\theta\right)d\theta$$

$$=\frac{2a^3}{3}\left(3\cdot1+3\cdot\frac{1}{2}\cdot\frac{\pi}{2}+\frac{2}{3}\cdot1\right)$$

$$=\left(\frac{22}{9}+\frac{\pi}{2}\right)a^3$$

-- 6 分

评分说明

1、二次积分，前面的容易（1 分），后面的复杂（2 分）

2、第二个定积分的计算，对称性、递推公式 $\int_0^{\frac{\pi}{2}}\cos^n\theta d\theta$，都是给分点

4. （10 分）设 Γ 为柱面 $x^2+y^2=2y$ 与平面 $y=z$ 的交线，从 z 轴正向看为顺时针，计算

$$I=\oint_{\Gamma} y^2dx+xydy+xzdz.$$

解（方法一） 1、曲线的参数方程：

$$\begin{cases} x=\cos\theta \\ y=1+\sin\theta, \theta:2\pi\to 0 \\ z=1+\sin\theta \end{cases}$$

--------- $xyz\theta$ 各 1 分-----------------------------4 分

2、将第二型曲线积分化为定积分计算

$$I=\oint_{\Gamma} y^2dx+xydy+xzdz$$
$$=\int_{2\pi}^{0}\left[-(1+\sin\theta)^2\sin\theta+\cos^2\theta(1+\sin\theta)+\cos^2\theta(1+\sin\theta)\right]d\theta$$

--------------------------------------6 分

$$=\int_0^{2\pi}\left[(1+\sin\theta)^2\sin\theta-2\cos^2\theta(1+\sin\theta)\right]d\theta$$
$$=\int_0^{2\pi}(1+\sin\theta)\left[(1+\sin\theta)\sin\theta-2\cos^2\theta\right]d\theta$$
$$=\int_0^{2\pi}(1+\sin\theta)\left(-2+\sin\theta+3\sin^2\theta\right)d\theta$$
$$=\int_0^{2\pi}\left(-2-\sin\theta+4\sin^2\theta+3\sin^2\theta\right)d\theta$$
$$=\int_0^{2\pi}\left(-2-\sin\theta+4\sin^2\theta+3\sin^2\theta\right)d\theta$$
$$=-4\pi+4\int_0^{2\pi}\sin^2\theta d\theta$$

-------------------------------------8 分

$$=-4\pi+16\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin^2\theta d\theta$$
$$=-4\pi+16\cdot\frac{1}{2}\cdot\frac{\pi}{2}=0$$

--------------------10 分

解（方法二） 圆柱体与平面的截面是一个椭圆，该椭圆记为S，并取椭圆的下侧，法方向方向余弦为 ---------------------1 分

$$\left(\cos\alpha,\cos\beta,\cos\gamma\right)=\frac{1}{\sqrt{2}}\left(0,1,-1\right)。$$ ---------------------4 分

根据斯托克斯公式，

$$I=\oint_{\Gamma}y^2dx+xydy+xzdz$$

$$=\iint_S\begin{vmatrix}dydz & dzdx & dxdy\\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z}\\ y^2 & xy & xz\end{vmatrix}$$ ---------------------8 分

$$=\iint_S -zdzdx-ydxdy$$

$$=\iint_S\left(-z\cos\beta-y\cos\gamma\right)dS$$

$$=\frac{1}{\sqrt{2}}\iint_S\left(-z+y\right)dS=\frac{1}{\sqrt{2}}\iint_S 0dS$$

$$=0$$

---------------------10 分

解（方法三） 圆柱体与平面的截面是一个椭圆，椭圆在xOy坐标面上的投影是D，边界∂D取顺时针方向。因为在Γ上，$y=z$，所以

$$I=\oint_{\Gamma}y^2dx+xydy+xzdz=\oint_{\Gamma}y^2dx+xydy+xydy$$

$$=\oint_{\Gamma}y^2dx+2xydy$$

$$=\oint_{\partial D}y^2dx+2xydy$$

$$=-\iint_D\left(\frac{\partial\left(2xy\right)}{\partial x}-\frac{\partial\left(y^2\right)}{\partial y}\right)dxdy$$

$$=-\iint_D\left(2y-2y\right)dxdy$$

$$=0$$

5. **（15 分）**已知曲线积分

$$\int_L \left(-2f(x)+e^x+10\cos x\right)\sin y dx+\left(f'(x)-3f(x)\right)\cos y dy$$

与积分路径无关， $f(x)$ 有连续的二阶导函数，求 $f(x)$.

解 根据路径无关的条件

$$\frac{\partial}{\partial y}\left[\left(-2f(x)+e^x+10\cos x\right)\sin y\right]=\frac{\partial}{\partial x}\left[\left(f'(x)-3f(x)\right)\cos y\right]$$ ------------------3 分

$$\left(-2f(x)+e^x+10\cos x\right)\cos y=\left(f''(x)-3f'(x)\right)\cos y$$

$$f''(x)-3f'(x)+2f(x)=e^x+10\cos x$$

---5 分

特征方程 $\lambda^2-3\lambda+2=0$，特征根 $\lambda_1=1,\lambda_2=2$ 。 -------------------------------------- 7 分

$f''(x)-3f'(x)+2f(x)=e^x$ 的特解： $y=axe^x$，代入

$$y'=axe^x+ae^x$$

$$y''=axe^x+2ae^x$$

$$axe^x+2ae^x-3\left(axe^x+ae^x\right)+2axe^x=e^x$$

求得 $a=-1$， $y=xe^x$； -- 10 分

$f''(x)-3f'(x)+2f(x)=10\cos x$： $y=a\cos\theta+b\sin\theta$，代入

$$y''=-a\cos\theta-b\sin\theta,\quad y'=-a\sin\theta+b\cos\theta$$

$$\begin{cases}a-3b=10\\ b+3a=0\end{cases},\quad \begin{cases}a=1\\ b=-3\end{cases},$$

$$y=\cos\theta-3\sin\theta$$ --- 13 分

故

$$f(x)=-xe^x+\cos\theta-3\sin\theta+C_1e^x+C_2e^{2x},$$

其中 C_1、C_2 为任意常数。 --- 15 分

6. （8 分）计算第二型曲面积分 $\iint\limits_S xyzdxdy$，其中 S 是球面 $x^2+y^2+z^2=1$ 在第八卦限的部分，取球面外侧.

解 1、球面的第八卦限的部分，在坐标面 xOy 的投影为

$$D=\left\{(r,\theta)\middle|\frac{3\pi}{2}\le\theta\le 2\pi,0\le r\le 1\right\},$$ --------------------2 分

2、$z=-\sqrt{1-x^2-y^2}$，$dxdy=\cos\gamma dS\le 0$，所以 -------------------------4 分

$$\begin{aligned}
\iint\limits_S xyzdxdy &= \iint\limits_D xy\sqrt{1-x^2-y^2}dxdy\\
&=\int_{\frac{3\pi}{2}}^{2\pi}d\theta\int_0^1 r^2\sin\theta\cos\theta\sqrt{1-r^2}\cdot rdr\\
&=\frac{1}{2}\int_{\frac{3\pi}{2}}^{2\pi}\sin 2\theta d\theta\cdot\int_0^1 r^2\sqrt{1-r^2}\cdot rdr\\
&=-\frac{1}{2}\int_0^1 r^2\sqrt{1-r^2}\cdot rdr\\
&=-\frac{1}{4}\int_0^1 x\sqrt{1-x}dx\\
&=-\frac{1}{4}\left(-\int_0^1(1-x)\sqrt{1-x}dx+\int_0^1\sqrt{1-x}dx\right)\\
&=-\frac{1}{2}\left(-\int_0^1(1-x)^{\frac{3}{2}}dx+\int_0^1(1-x)^{\frac{1}{2}}dx\right)\\
&=-\frac{1}{4}\left(\frac{2}{5}(1-x)^{\frac{5}{2}}-\frac{2}{3}(1-x)^{\frac{3}{2}}\right)\Bigg|_0^1\\
&=\frac{1}{4}\left(\frac{2}{5}-\frac{2}{3}\right)=-\frac{1}{15}
\end{aligned}$$

--------------------8 分

7. （8 分）求方程 $\frac{dy}{dx}=\frac{6y}{x}-xy^2$ 的通解.

解（方法一） 1、$y=0$ 是一个特解； ---题目不关心特解

2、当 $y\neq 0$ 时，$y^{-2}\frac{dy}{dx}=\frac{6y^{-1}}{x}-x$，$-\frac{dy^{-1}}{dx}=\frac{6y^{-1}}{x}-x$，$\frac{dy^{-1}}{dx}+\frac{6y^{-1}}{x}=x$.

令 $z=y^{-1}$，即得到一个一阶线性非齐次常微分方程：

$$\frac{dz}{dx}+\frac{6z}{x}=x$$ ---3 分

3、解对应的齐次线性微分方程：$\frac{dz}{dx}+\frac{6z}{x}=0$

$$\frac{dz}{z}=-6\frac{dx}{x},\int\frac{dz}{z}=-6\int\frac{dx}{x},\ln|z|=-6\ln|x|+C_1,|z|=e^{C_1}x^{-6},\quad z=\frac{\pm e^{C_1}}{x^6}=\frac{C}{x^6},$$

其中 C_1 为任意常数，$C=\pm e^{C_1}\neq 0$。 --5 分

4、常数变异，假设 $z=\frac{C(x)}{x^6}$ 是 $\frac{dz}{dx}+\frac{6z}{x}=x$ 的解，则

$$\left(\frac{C'(x)}{x^6}-6\frac{C(x)}{x^7}\right)+6\frac{C(x)}{x^7}=x,$$

$$\frac{C'(x)}{x^6}=x,C'(x)=x^7,C(x)=\frac{1}{8}x^8+C_2$$

所以

$$z=\frac{\frac{1}{8}x^8+C_2}{x^6}=\frac{x^2}{8}+\frac{C_2}{x^6}=\frac{x^8+8C_2}{8x^6}=\frac{x^8+C}{8x^6}$$

其中 $C=8C_2$ 为任意常数。 ------------------------------7 分

5、原方程 $\frac{dy}{dx}=\frac{6y}{x}-xy^2$ 的通解为

$$\frac{1}{y}=\frac{x^8+C}{8x^6},\quad y=\frac{8x^6}{x^8+C}。$$ -------------------------8 分

由于特解 $y=0$ 无法融合到通解中，所以 $y=0$ 是一个奇异解。

--------------------------------题目不关心奇异解

解（方法二）令 $z=\dfrac{1}{y}$，则

$$\frac{dz}{dx}+\frac{6z}{x}=x$$

$$dz+\left(\frac{6z}{x}-x\right)dx=0$$

算出积分因子 x^6，所以

$$x^6dz+\left(6x^5z-x^7\right)dx=0，\quad d\left(x^6z-\frac{1}{8}x^8\right)=0$$

$$x^6z-\frac{1}{8}x^8=C_1，\quad z=\frac{x^8+8C_1}{8x^6},$$

$$y=\frac{8x^6}{x^8+C}$$

8. （8 分）求微分方程 $yy''-\left(y'\right)^2=0$ 满足初始条件 $y(0)=y'(0)=1$ 的特解.

解（方法一） 令 $p=y'$，则 $y''=\dfrac{d}{dx}\left(y'\right)=\dfrac{dp}{dx}=\dfrac{dp}{dy}\cdot\dfrac{dy}{dx}=p\dfrac{dp}{dy}$，所以方程变形为

$$yp\frac{dp}{dy}-p^2=0\text{。}$$ --------------------2 分

1、 $p=0$，即 $y=C$ 是微分方程的一个特解，但不满足初始条件；--------------------3 分

2、当 $p\neq0$ 时，

$$y\frac{dp}{dy}-p=0\text{，}\quad\frac{dp}{p}=\frac{dy}{y}\text{，}$$

融合特解后的通解是 $p=C_1y$，其中 C_1 为任意常数。 --------------------5 分

3、解方程 $y'=C_1y$，得到通解 $y=C_2e^{C_1x}$，其中 C_1、C_2 为任意常数。----------------7 分

4、根据初始条件， $y=e^x$。 --------------------8 分

（方法二）

1、 $y=C$ 是微分方程的一个特解，但不满足初始条件；-----------------------------------1 分

2、当 $y\cdot y'\neq0$ 时，

$$\frac{y''}{y'}=\frac{y'}{y}\text{，}\quad\left(\ln\left|y'\right|\right)'=\left(\ln|y|\right)'\text{，}\quad\left(\ln\left|\frac{y'}{y}\right|\right)'=0\text{，}\quad\ln\left|\frac{y'}{y}\right|=C_1\text{，}$$

$$\left|\frac{y'}{y}\right|=e^{C_1}\text{，}$$

$$\frac{y'}{y}=\pm e^{C_1}\triangleq C_2$$

根据初始条件，$C_2=1$，$\dfrac{y'}{y}=1$。 --4 分

3、解方程 $\dfrac{dy}{dx}=y$，得 $y=Ce^x$。----- ---6 分

4、根据初始条件， $y=e^x$。------ ---8 分

9. （8 分）求幂级数 $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{2n-1}{2^n}x^{2n-2}$ 的收敛半径、收敛区间与收敛域.

解

$$\frac{\frac{2(n+1)-1}{2^{(n+1)}}}{\frac{2n-1}{2^n}}\to\frac{1}{2},$$

收敛半径为 $R=\sqrt{2}$。 -- 4 分

易见幂级数在 $\pm\sqrt{2}$，

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{2n-1}{2^n}x^{2n-2}=\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{2n-1}{2^n}\cdot\frac{2^n}{2}\right)=\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{2n-1}{2}\right),$$

一般项不趋于 0，级数发散。所以收敛区间和收敛域都是 $\left(-\sqrt{2},\sqrt{2}\right)$

--8 分

评分说明

收敛半径也可以用正向级数的比值判别法来求：

$$\lim_{n\to\infty}\left|\frac{\frac{2(n+1)-1}{2^{(n+1)}}x^{2(n+1)-2}}{\frac{2n-1}{2^n}x^{2n-2}}\right|=\lim_{n\to\infty}\left|\frac{2n+1}{2n-1}\cdot\frac{1}{2}x^2\right|=\frac{1}{2}|x|^2,$$

于是，当 $|x|<\sqrt{2}$，级数收敛；所以当 $|x|>\sqrt{2}$，级数发散，收敛半径为 $R=\sqrt{2}$。

10. （10 分）讨论下列级数的敛散性：

1) $\sum\limits_{n=2}^{\infty}\dfrac{n^2}{(\ln n)^{\ln n}}$.

解（方法一） 1、$(\ln n)^{\ln n}=e^{\ln n\cdot\ln\ln n}=\left(e^{\ln n}\right)^{\ln\ln n}=n^{\ln\ln n}$， --------------------------------1 分

2、当

$$\ln\ln n>4,\ln n>e^4,n>e^{e^4}$$

时， ------------------------------2 分

$$\frac{n^2}{(\ln n)^{\ln n}}<\frac{n^2}{n^4}=\frac{1}{n^2},$$ ------------------------------3 分

而 $\sum\limits_{n=2}^{\infty}\dfrac{1}{n^2}$ 收敛， ------------------------------4 分

根据比较判别法原级数收敛。 ------------------------------5 分

（方法二）首先证明当 n 充分大时，$\dfrac{n^2}{(\ln n)^{\ln n}}<\dfrac{1}{n^2}$，即

$$(\ln n)^{\ln n}>n^4，\ \ln n\cdot\ln\ln n>4\ln n，\ \ln\ln n>4，$$

只要 $n>e^{e^4}$ 即可。根据比较判别法，因为 $\sum\limits_{n=2}^{\infty}\dfrac{1}{n^2}$ 收敛，所以原级数收敛。

2) $\sum\limits_{n=2}^{\infty}\dfrac{1}{n(\ln n)^{0.9}(\ln\ln n)^9}$.

解（找一个 $0.9<\alpha=0.99\le 1$） ---------------1 分

$$\frac{\dfrac{1}{n(\ln n)^{0.9}(\ln\ln n)^9}}{\dfrac{1}{n(\ln n)^{0.99}}}=\frac{(\ln n)^{0.09}}{(\ln\ln n)^9}\to\infty,$$ ---------------2 分

而

$$\int_2^{+\infty}\frac{1}{x(\ln x)^{0.99}}dx=\int_2^{+\infty}\frac{1}{(\ln x)^{0.99}}d\ln x=100\cdot\left(\ln x\right)^{0.01}\Big|_2^{+\infty}$$ 发散， -------------------3 分

所以

$$\sum_{n=2}^{\infty}\frac{1}{n(\ln n)^{0.99}}$$ 发散， ---------------4 分

故 $\sum\limits_{n=2}^{\infty}\dfrac{1}{n(\ln n)^{0.9}(\ln\ln n)^9}$ 发散。 ---------------5 分

11. （8 分）证明函数项级数 $\sum_{n=1}^{\infty} x^2 e^{-x^2 n^{1.5}}$ 在 $\left(-\infty < x < \infty\right)$ 上一致收敛.

解 令 $f(t) = te^{-\alpha t}, t > 0, \alpha > 0$， $f'(t) = e^{-\alpha t} - \alpha t e^{-\alpha t} = e^{-\alpha t}\left(1-\alpha t\right)$， $t = \frac{1}{\alpha}$ 是唯一驻点。

当 $t \in \left(0, \frac{1}{\alpha}\right)$ 时，函数单调上升；当 $t \in \left(\frac{1}{\alpha}, +\infty\right)$ 时，函数单调下降，所以函数在当 $t = \frac{1}{\alpha}$

达到最大值，于是 $f(t) = te^{-\alpha t} \le \frac{1}{e\alpha}$， 所以

$$x^2 e^{-x^2 n^{1.5}} \le \frac{1}{e \cdot n^{1.5}},$$ --4 分

或者

$$\because e^x \ge x, \therefore x^2 e^{-x^2 n^{1.5}} = \frac{x^2}{e^{x^2 n^{1.5}}} \le \frac{x^2}{x^2 n^{1.5}} = \frac{1}{n^{1.5}}$$

----------------4 分

$\sum_{n=1}^{\infty} x^2 e^{-x^2 n^{1.5}}$ 是一个正项级数， ----------------------------------5 分

因为

$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^{1.5}}$ 收敛， --6 分

根据强级数判别法，原级数收敛。 --8 分

12. （5 分）证明级数 $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\cos n\varphi}{n}$ 不是绝对收敛.

解 1、当 $2\varphi=2k\pi,k\in Z$ 时，$\left|\frac{\cos n\varphi}{n}\right|=\frac{1}{n}$，调和级数发散，所以级数不是绝对收敛的。

-- 1 分

2、当 $2\varphi\neq 2k\pi,k\in Z$ 时，

$$\left|\frac{\cos n\varphi}{n}\right|\geq\frac{\cos^2 n\varphi}{n}=\frac{1}{2n}+\frac{\cos 2n\varphi}{2n},$$

-- 2 分

因为 $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\cos 2n\varphi}{2n}$ 收敛 ------------------------------------- 3 分

$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{2n}$ 发散，所以 $\sum_{n=1}^{\infty}\left|\frac{\cos n\varphi}{n}\right|$ 发散，原级数也不绝对收敛。 --------------- 4 分

总之，$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\cos n\varphi}{n}$ 永不绝对收敛。

-- 5 分

评分说明

评分时找给分点：

1、 懂得分情况讨论，给一分；
2、 调和级数发散，给一分；
3、 不等式缩放，给一分；
4、 说明级数 $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\cos 2n\varphi}{2n}$ 收敛，给一分；
5、 级数的性质：发散级数与收敛级数之和发散，给一分。